

**FACULDADE DE TECNOLOGIA DE SÃO PAULO
CURSO TECNOLOGIA EM MATERIAIS
DEPARTAMENTO ENSINO GERAL**

LUIZ MURILO MARQUES BARRETO

PROPAGAÇÃO DE SÓLITONS EM FIBRA ÓPTICA

**São Paulo
Dezembro/2020**

LUIZ MURILO MARQUES BARRETO

PROPAGAÇÃO DE SÓLITONS EM FIBRA ÓPTICA

Trabalho apresentado a Faculdade de Tecnologia de São Paulo, no Curso de Tecnologia em Materiais, para a obtenção do título de Tecnólogo em Materiais sob orientação da Prof.^a Dra. Regina Maria Ricotta.

**São Paulo
Dezembro/2020**

AGRADECIMENTOS

Ao CNPq pela bolsa de Iniciação Científica que me permitiu seguir minha pesquisa até o fim.

À Prof. Dra. Regina Maria Ricotta por toda orientação e carinho que teve comigo ao longo desses anos.

Aos amigos que fiz durante esses anos na Fatec, cada incentivo, risada e conselhos me fizeram alcançar tudo que sempre sonhei, em especial para a Julia Bachega, Juliana Mázas e a Marianne Custódio que me acompanharam no curso inteiro, guardarei com carinho tudo o que passamos.

RESUMO

Nesse trabalho apresentaremos como é possível a propagação de um sóliton em um sistema de fibra óptica, considerando o comprimento de onda, o comprimento da fibra óptica, ou seja, a distância de propagação o material que a fibra é feita e o nível de pureza. Tendo um feixe de luz dentro da fibra óptica passamos pelo fenômeno da reflexão interna total, o que assegura que o feixe se manterá dentro da fibra. Por conta da dispersão material e da não linearidade, teremos ambos os efeitos se contrabalanceando e criando esse perfil solitônico que não irá se alterar conforme viaja pela fibra, onde ele pode ser aplicado em instalações de pequeno porte, devido a dificuldade de reprodução e da reprodução das características da fibra.

Palavras-chaves: Sóliton. fibra óptica. dispersão. não linearidade.

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO	6
2. Fibra Óptica	7
2.1. Características Básicas da Fibra Óptica	7
2.2. A Abertura Numérica	8
2.3. O pacote coerente.....	8
2.4. Atenuação em Fibra Óptica.....	9
2.5. Dispersão de pulso em fibras ópticas de índice degrau.....	9
2.6. Mecanismos de perda	9
2.6.1. Perdas por absorção.....	10
2.6.2. Perdas radiativas	10
3. Dispersão Material.....	11
3.1. Dispersão do pulso através da fibra	11
3.2. Cálculo da Dispersão Material.....	11
3.3. Derivação da Velocidade de Grupo.....	13
3.4. Alargando um pulso Gaussiano.....	16
4. Fenômenos do pulso.....	19
4.1. Dispersão e <i>Chirping</i>	19
4.2. Compressão do <i>Chirped Pulse</i>	20
4.3. Propagação do pulso <i>Chirped</i> através de um meio linear dispersivo	21
4.4. Compensação de Dispersão do pulso Gaussiano.....	22
5. Sólitons Ópticos	25
5.1. Condições para obtenção do Sóliton	25
5.2. Alto Modulação de Fase.....	26
5.3. Derivação Heurística da potência do sóliton	31
5.4. Equação de Schrödinger não linear.....	34
5.4.1. Propagação na presença da dispersão.....	34
5.4.2. Propagação na presença da não linearidade	35
5.5. Solução da Equação de Schrödinger não linear	37
6. Conclusão	38
7. Referências	39
Apêndice: Desenvolvimento da Equação de Schrödinger não linear	40

1.INTRODUÇÃO

Sólitons são ondas solitárias que se propagam por longas distâncias sem mudança de sua forma e, mesmo com a interação com outro sóliton, sua forma permanece inalterada. São soluções de equações não lineares e dispersivas, [1]. Este trabalho tem o objetivo de estudar a propagação de sólitons ópticos, que se propagam em uma fibra óptica [2,3].

O fenômeno solitônico, após sua descoberta por John Scott Russell, em 1834, observando embarcações em um canal, o estudo dos sólitons só tem crescido com o passar do tempo abrangendo diversas áreas, como computação, área de desenvolvimento de materiais e sistemas ópticos não lineares que é o foco desse trabalho.

O sóliton óptico foi observado a primeira vez por Linn F. Mollenauer, em 1980, New Jersey, onde ele comprovou a presença do sóliton através dos estudos da não linearidade e da dispersão material. A dificuldade do estudo se da por causa da instabilidade ocasionada pelo sistema estudado, para a reprodução dos sólitons ópticos diversos fatores devem ser controlados que explicaremos nos próximos capítulos [4].

Com esse trabalho temos o objetivo de explicar o fenômeno solitônico, desde as condições necessárias para a reprodução do mesmo até a compensação dos fenômenos da dispersão e da não linearidade para garantir o perfil solitônico inalterado.

O avanço científico na área da física está diretamente atrelado ao desenvolvimento de novos materiais e os sólitons são grandes responsáveis por carregar boa parte desse avanço, se tratando da não linearidade novas oportunidades de sistemas a serem observados agora são possíveis e esse avanço continua até os dias atuais.

2. Fibra Óptica

2.1. Características Básicas da Fibra Óptica

A fibra óptica é considerada um guia de onda, que é uma estrutura que pode guiar um feixe de luz de um lugar para outro. O guia de onda é feito com um índice de refração maior do que sua casca.

$$\begin{aligned} n(r) &= n_1, & 0 < r < a; & \text{Núcleo} \\ n(r) &= n_2, & r > a; & \text{Casca} \end{aligned}$$

onde “r” representa a coordenada cilíndrica radial e “a” representa o raio do núcleo. Na verdade, o núcleo se estende somente a uma distância finita “b”, entretanto, para todos os propósitos práticos, assumiremos que a cobertura se estenda ao infinito. Tipicamente, para estabelecer um índice para a fibra de sílica (multimodo) [1].

$$n_1 = 1,48, n_2 = 1,46, a = 25\mu\text{m}, b = 62,5\mu\text{m}$$

Nesse capítulo, serão discutidas as várias características da fibra óptica. Para entendermos o guia de luz em uma fibra óptica, consideramos a entrada de um raio na fibra como mostrado na Figura 1. Se o ângulo de incidência for maior que o ângulo crítico

$$\theta_c = \text{sen}^{-1}\left(\frac{n_1}{n_2}\right) \quad (2.1)$$

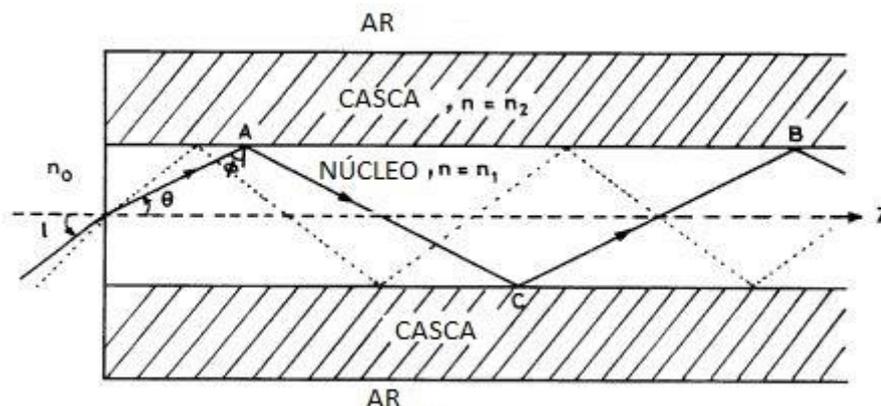


Figura 1 – Raio de luz ao longo da fibra, [1].

então o raio sofrerá reflexão interna total na interface. Entretanto, por conta da simetria cilíndrica na estrutura de uma fibra, esse raio vai sofrer reflexão interna total na menor interface e será guiada através do núcleo pelas repetidas

reflexões interna total. A Figura 1 mostra o guia atual do raio de luz que se propaga ao longo da fibra óptica [1].

2.2. A Abertura Numérica

Considere um raio que incide na abertura de entrada da fibra fazendo um ângulo “i” com o eixo, como na Figura 1. O raio refratado faz um ângulo θ com o eixo da fibra. Assumindo que o meio de fora tem um índice de refração n_0 (para casos mais práticos será unitário), teremos

$$\frac{\text{sen } I}{\text{sen } \theta} = \frac{n_1}{n_0} \quad (2.2)$$

se houver reflexão total interna escrevemos

$$\text{sen } I = \left(\frac{n_1^2 - n_2^2}{n_0^2} \right)^{1/2} . \quad (2.3)$$

Se $(n_1^2 - n_2^2)^{1/2} \geq n_0$, então todos os valores de i sofrerão reflexão total interna na interface núcleo-casca. Assumindo $n_0 = 1$, o valor máximo de sen I para o raio será dado por

$$\begin{aligned} \text{sen } I &= (n_1^2 - n_2^2)^{1/2} \text{ quando } n_1^2 < n_2^2 + 1 \\ \text{sen } I &= 1 \text{ quando } n_1^2 > n_2^2 + 1 \end{aligned}$$

A abertura numérica NA é definida por

$$NA = (n_1^2 - n_2^2)^{1/2} \quad (2.4)$$

2.3. O pacote coerente

Se muitas fibras são colocadas juntas, essa disposição é conhecida como pacote. Se as fibras não estiverem alinhadas, ou seja, presas juntas, é dito que o pacote tem uma forma incoerente. No entanto, se as fibras estão propriamente alinhadas, isto é, se as posições relativas da entrada e saída da fibra forem as mesmas, o pacote é dito então, coerente [1].

Possivelmente a aplicação mais importante do pacote de coerência é a endoscopia de fibra óptica, que pode ser colocado dentro do corpo humano e o

interior do corpo pode ser visto de fora, o pacote é revestido e cada fibra transmite luz de fora para o interior do corpo [1].

2.4. Atenuação em Fibra Óptica

Atenuação e dispersão representam duas das características mais importantes de uma fibra óptica que determinam os espaçamentos de repetidores no sistema de comunicação de uma fibra óptica. Os espaçamentos de repetidores requeridos são inversamente proporcionais à atenuação e por consequência ao custo do sistema de comunicação [1].

A atenuação de um raio óptico é usualmente mensurado em decibéis (dB). Se a entrada de potência P_1 resulta em uma saída de potência P_2 , então a perda em dB é dada por

$$\text{Perda} = 10 \log_{10} \left(\frac{P_1}{P_2} \right) . \quad (2.5)$$

2.5. Dispersão de pulso em fibras ópticas de índice degrau

A dispersão do pulso representa uma das características mais importantes da fibra óptica que determina a capacidade de carregar informações de um sistema de fibra óptica.

Nos sistemas de comunicação digital, as informações são enviadas em códigos na forma de pulsos que são transmitidos de um transmissor a um receptor onde a informação é decodificada. Quanto maior o número de pulsos que podem ser enviados por unidade de tempo e se manterem “recebíveis”, maior será a capacidade de transmissão do sistema.

Para calcular a dispersão do comprimento L da fibra pelo tempo

$$T = t_{max} - t_{min} = \frac{n_1^2 L}{c n_2} - \frac{n_1 L}{c} = \frac{n_1 L}{c} \left(\frac{n_1}{n_2} - 1 \right) . \quad (2.6)$$

2.6. Mecanismos de perda

As principais fontes de atenuação na fibra óptica pode ser amplamente classificada em dois grupos: absorção e radiativa.

2.6.1. Perdas por absorção

As perdas por absorção podem ser subdivididas em perdas intrínsecas e extrínsecas. A absorção intrínseca é causada pela interação da onda se propagando com um ou mais componentes do vidro utilizado na fibra.

Por outro lado, absorção extrínseca é causada pela presença de pequenas quantidades de material como metais de transição (Fe^{2+} , Cu^{2+} , Cr^{3+} e etc.) e pelos íons OH^- dissolvidos no vidro [1].

2.6.2. Perdas radiativas

As perdas radiativas ocorrem quando um feixe de luz guiada se acopla à radiação se propagando na casca. O espalhamento *Rayleigh* é predominantemente responsável por tais acoplamentos e é um mecanismo fundamental que é causado por não homogeneidades em pequena escala (comparado com o comprimento de onda da luz) que são congeladas na fibra [1].

3. Dispersão Material

3.1. Dispersão do pulso através da fibra

Até agora estava sendo considerado o alargamento de um pulso óptico devido a diferentes tempos para se propagar através de um certo comprimento da fibra. No entanto, qualquer fonte de luz terá uma certa largura espectral $\Delta\lambda_0$ e cada componente do espectro irá, em geral, viajar com diferentes velocidades de grupo, tendo assim, dispersão. Isto é referido como dispersão material e é uma característica do material somente; a dispersão desempenha um importante trabalho no *design* de um sistema de comunicação feito com fibra óptica.

3.2. Cálculo da Dispersão Material

Quando um pulso temporal se propaga através de um meio homogêneo, se propaga com velocidade de grupo v_g dado pela equação

$$v_g = \frac{1}{(dk/d\omega)} \quad (3.1)$$

onde $k(\omega) = \frac{\omega}{c} n(\omega)$ representa a constante de propagação e $n(\omega)$ representa o índice de refração dependente da frequência. Assim podemos mostrar que

$$\frac{1}{v_g} = \frac{1}{c} \left(n(\omega) + \omega \frac{dn}{d\omega} \right) . \quad (3.2)$$

Usualmente se expressa a velocidade de grupo em termos do comprimento de onda no espaço livre λ_0 , que é relacionado à frequência através da seguinte relação

$$\lambda_0 = \frac{2\pi c}{\omega} \quad (3.3)$$

com isso, a equação (3.2) pode ser escrita

$$\frac{1}{v_g} = \frac{1}{c} \left(n(\lambda_0) - \lambda_0 \frac{dn}{d\lambda_0} \right) . \quad (3.4)$$

Portanto, o tempo que o pulso leva para atravessar um comprimento L da fibra é dado por

$$\tau = \tau(\lambda_0) = \frac{L}{v_g} = \frac{L}{c} \left(n(\lambda_0) - \lambda_0 \frac{dn}{d\lambda_0} \right) \quad (3.5)$$

que é dependente do comprimento de onda λ_0 . A quantidade

$$N(\lambda_0) = n(\lambda_0) - \lambda_0 \frac{dn}{d\lambda_0} \quad (3.6)$$

é também referida como índice de refração do grupo uma vez que $c/N(\lambda_0)$ resulta na velocidade de grupo, na Figura 2 podemos ver o comportamento do índice de refração conforme é submetido a diferentes comprimentos de onda.

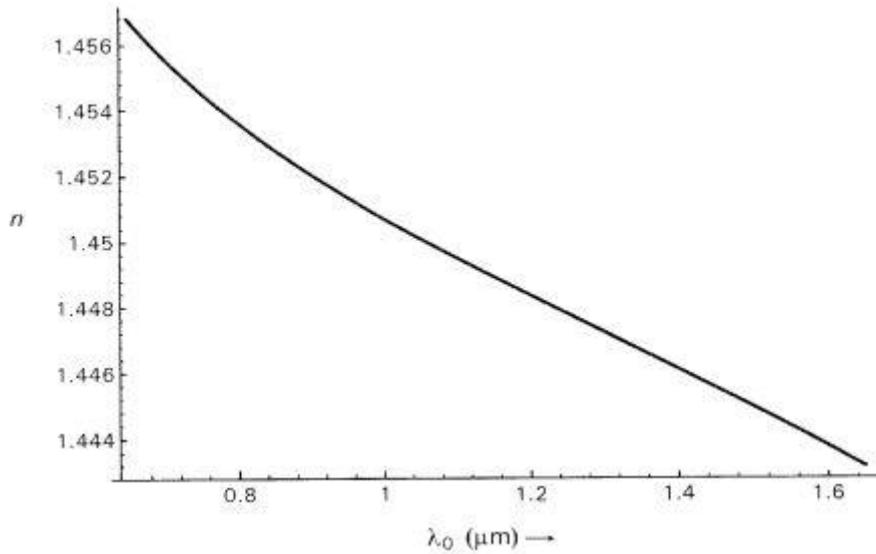


Figura 2 – Variação do índice de refração com diferentes comprimentos de onda, [1].

Se a fonte for caracterizada pela largura espectral $\Delta\lambda_0$, então cada componente do comprimento de onda irá viajar com uma velocidade de grupo distinta, resultando em alargamento temporal do pulso.

Esse alargamento é dado por

$$\Delta\tau = -\frac{L}{c} \left(\lambda_0^2 \frac{d^2n}{d\lambda_0^2} \right) \left(\frac{\Delta\lambda_0}{\lambda_0} \right). \quad (3.7)$$

O valor do termo $\lambda_0^2 \frac{d^2n}{d\lambda_0^2}$ é adimensional. O alargamento acima mostrado no segundo termo da expressão (3.7) se refere à dispersão material e ocorre quando um pulso se propaga através de qualquer meio dispersivo. A dispersão material dada pela equação (3.7) é proporcional à largura espectral $\Delta\lambda_0$ e o comprimento L percorrido no meio é, geralmente, demonstrado em

picosegundos por quilômetros (comprimento da fibra) por nanômetro (largura espectral da fonte), como podemos observar seu comp.

$$D_m = \frac{\Delta\tau}{L \Delta\lambda_0} = - \frac{1}{\lambda_0 c} \left(\lambda_0^2 \frac{d^2 n}{d\lambda_0^2} \right) \times 10^9 \left(\frac{ps}{km.nm} \right) \quad (3.8)$$

onde λ_0 é mensurado em micrometros e $c = 3 \times 10^5 km/s$.

3.3. Derivação da Velocidade de Grupo

Uma onda plana monocromática se propagando ao longo do eixo z através de um meio homogêneo infinitesimalmente estendido é descrita por

$$\psi = A e^{i(\omega t - kz)} \quad (3.9)$$

onde $k(\omega)$ representa a constante de propagação. Essa onda monocromática viaja com a velocidade dada por

$$v_p = \frac{\omega}{k} \quad (3.10)$$

que se refere à velocidade de fase e representa a velocidade na qual uma superfície de fase constante avança no meio. Uma onda monocromática descrita pela equação (3.8) se estende por todo o domínio, $-\infty < t < \infty$, que é uma impossibilidade prática.

Considerando um pulso temporal descrito pela função $\psi(z = 0, t)$ em $z=0$ (Figura 3).

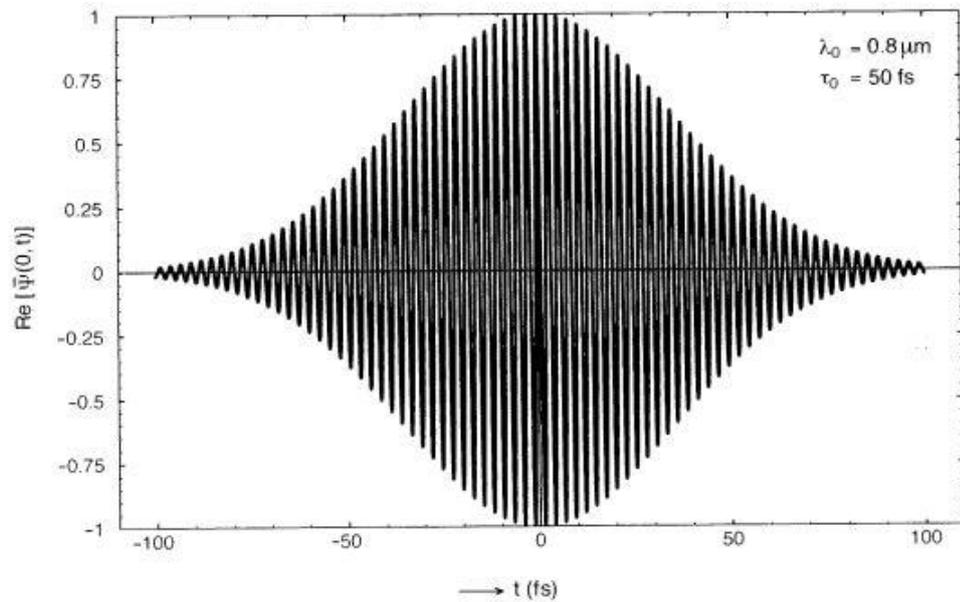


Figura 3 – Pulso Gaussiano, [1].

Para analisar a evolução nós o representamos por uma superposição das ondas harmônicas

$$\psi(z = 0, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} A(\omega) e^{i\omega t} d\omega. \quad (3.11)$$

A transformada de Fourier nos dá

$$A(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int \psi(z = 0, t) e^{-i\omega t} dt. \quad (3.12)$$

Cada componente de frequência se propagaria de acordo com a equação 3.8; portanto o campo total em z será dado por

$$\psi(z, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} A(\omega) e^{i(\omega t - kz)} d\omega. \quad (3.13)$$

Nós escrevemos então

$$A(\omega) = |A(\omega)| e^{i\Phi(\omega)} \quad (3.14)$$

para obter

$$\psi(z, t) = \int |A(\omega)| e^{i[\omega t - k(\omega)z + \Phi(\omega)]} d\omega. \quad (3.15)$$

Na maioria dos casos um pulso óptico se propagando através de uma fibra pode ser aproximado para uma distribuição temporal Gaussiana.

$$\psi(z = 0, t) = C e^{-\left(\frac{t}{\tau_0}\right)^2} e^{-i\omega_0 t} \quad (3.16)$$

que representa um pulso Gaussiano com largura espectral $2\tau_0$. Substituindo na equação 3.11, nós teremos

$$A(\omega) = \frac{C\tau_0}{2\sqrt{\pi}} \exp\left[-\frac{\tau_0^2(\omega_0 - \omega)^2}{4}\right] \quad (3.17)$$

fatores típicos: pulso de $1 \text{ ns} = \tau_0$

$$\omega_0 = 2,36 \cdot 10^{15} \frac{\text{rad}}{\text{s}}, \lambda_0 = 0,8 \mu\text{m} \quad (3.18)$$

largura espectral de $A(\omega)$ é

$$\frac{\Delta\omega}{\omega_0} = \frac{2}{(\tau_0\omega_0)} = 2 \cdot 10^{-6}. \quad (3.19)$$

Como a variação $\Delta\omega$ é muito pequena a amplitude $A(\omega)$ é um pico centrado em ω_0 . Se aumentar τ_0 mais estreito $A(\omega)$ será ao redor de ω_0 .

Quanto mais longo o pulso mais fino será o espectro de frequências de $A(\omega)$.

Em casos práticos de interesse $|A(\omega)|$ é um pico bem fino centralizado ao redor do intervalo $\Delta\omega$, $\omega = \omega_0$ é o centro e desprezível no resto do intervalo e $\psi(z, t)$ fica sendo

$$\psi(z, t) = \int_{\Delta\omega} |A(\omega)| e^{i(\omega t - kz + \phi(\omega))} d\omega \quad (3.20)$$

podemos, portanto, expandir $k(\omega)$ ao redor de ω_0 (expansão de Taylor); e a fase também:

$$k(\omega) = k(\omega_0) + \left(\frac{dk}{d\omega}\right) (\omega - \omega_0) + \frac{1}{2} \left(\frac{d^2k}{d\omega^2}\right) (\omega - \omega_0)^2 + \dots \quad (3.21)$$

$$\phi(\omega) = \phi(\omega_0) + \left(\frac{d\phi}{d\omega}\right) (\omega - \omega_0) + \frac{1}{2} \left(\frac{d^2\phi}{d\omega^2}\right) (\omega - \omega_0)^2 + \dots \quad (3.22)$$

3.4. Alargando um pulso Gaussiano

Agora se pode realizar um cálculo explicitando os termos de segunda ordem nas equações 3.19 e 3.20 para um pulso gaussiano para cada amplitude $A(\omega)$ é dado pela equação 3.11.

Desde $A(\omega)$ seja real, $\phi(\omega) = 0$. Substituindo $A(\omega)$ e $k(\omega)$ nas equações 3.15 e 3.19 na equação 3.10, se obtém

$$\psi(z, t) = C e^{i(\omega_0 t - k_0 z)} f(z, t) \quad (3.23)$$

onde

$$f(z, t) = \frac{\tau_0}{2\sqrt{\pi}} \int \exp \left[-\Omega^2 \left(\frac{\tau_0}{4} + \frac{i\alpha}{2} z \right) + i\Omega \left(t - \frac{z}{v_g} \right) \right] d\Omega \quad (3.24)$$

onde, α é a segunda derivada de k em relação a frequência angular e ω é a variação da frequência, portanto, se pode escrever $f(z, t)$

$$f(z, t) = \left(1 + \frac{i 2\alpha z}{\tau_0^2} \right)^{-\frac{1}{2}} \exp \left[\frac{-\left(t - \frac{z}{v_g} \right)^2}{\tau_0^2 + i 2\alpha z} \right] \quad (3.25)$$

e $\psi(z, t)$ pode ser reescrita como

$$\psi(z, t) = \frac{C}{\left(\frac{\tau(z)}{\tau_0} \right)^{\frac{1}{2}}} \exp \left[\frac{-\left(t - \frac{z}{v_g} \right)^2}{\tau^2(z)} \right] \exp [i(\phi(z, t) - k_0 z)]. \quad (3.26)$$

A intensidade correspondente é dada por

$$I(z, t) = \frac{I_0}{\frac{\tau(z)}{\tau_0}} \exp \left[\frac{-2\left(t - \frac{z}{v_g} \right)^2}{\tau^2(z)} \right] \quad (3.27)$$

que foi plotado na Figura 4 abaixo com diferentes valores de z .

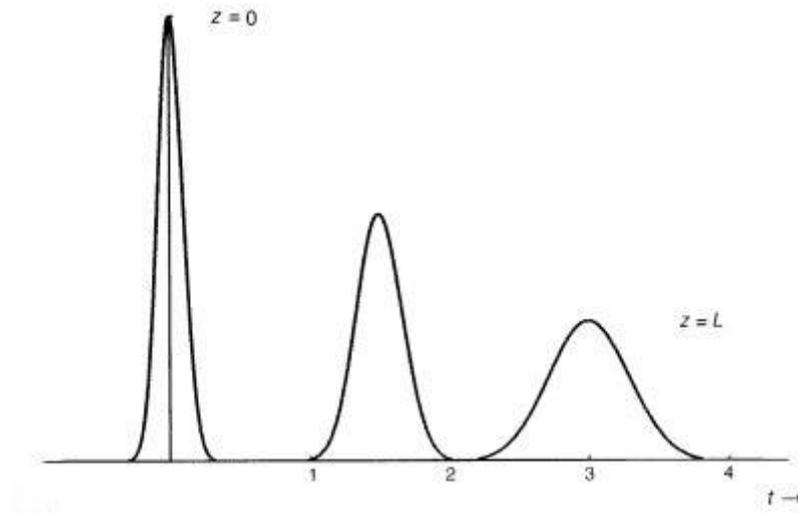


Figura 4 – Variação da intensidade do alargamento temporal de um pulso Gaussiano, [1].

A Figura 4 mostra com clareza o alargamento do pulso e indica que o pico do pulso viaja pela velocidade de grupo dada pela equação 3.1. Através da integral da intensidade

$$\int_{-\infty}^{+\infty} I(z, t) dt \quad (3.28)$$

é independente de z , ou seja, não depende do quanto viaja, mostrando que a energia total contida no pulso é conservada. Pela equação 3.25 pode se notar que a largura do pulso em qualquer valor de z será dado por

$$\tau(z) = \tau_0 \left[1 + \frac{4z^2}{\tau_0^4} \left(\frac{d^2 k}{d\omega^2} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \quad (3.29)$$

logo, o alargamento $\Delta\tau$ é dada por

$$\Delta\tau = [\tau^2(z) - \tau_0^2]^{\frac{1}{2}} = \frac{2z}{\tau_0} \left| \frac{d^2 k}{d\omega^2} \right| \quad (3.30)$$

e também

$$\frac{d^2 k}{d\omega^2} = \frac{\lambda_0^3}{2\pi c^2} \frac{d^2 n}{d\lambda_0^2} \quad (3.31)$$

também, a largura espectral do pulso Gaussiano dado pela equação 3.14 pode ser obtida da equação 3.11 como

$$\Delta\omega \approx \frac{2}{\tau_0} \quad (3.32)$$

Uma vez que $\omega = 2\pi c/\lambda_0$, se tem para a largura correspondente no comprimento de onda

$$\Delta\lambda_0 \approx \frac{\lambda_0^2}{\pi c \tau_0} \quad (3.33)$$

então

$$|\Delta\tau| \approx \frac{L}{c} \left| \lambda_0^2 \frac{d^2 n}{d\lambda_0^2} \right| \Delta\lambda_0 \frac{\Delta\lambda_0}{\lambda_0} \quad (3.34)$$

consistente com a equação 3.7.

4. Fenômenos do pulso

4.1. Dispersão e *Chirping*

Anteriormente, se discutiu a propagação do pulso causada pela dispersão da velocidade do grupo na fibra óptica. Para o caso específico do pulso na forma de uma Gaussiana, na forma

$$E(z = 0, t) = E_0 e^{-\left(\frac{t}{\tau_0}\right)^2} e^{-i\omega_0 t} \quad (4.1)$$

se mostrou que a variação do campo elétrico no pulso de saída da fibra é dada pela expressão

$$E(z, t) = \frac{E_0}{(1 + \sigma^2)^{\frac{1}{4}}} \exp\left[\frac{-\left(t - \frac{z}{v_g}\right)^2}{\tau^2(z)}\right] \exp[i(\vartheta(z, t) - \beta(\omega_0)z)] \quad (4.2)$$

onde,

$$\vartheta(z, t) = \omega_0 t + k\left(t - \frac{z}{v_g}\right)^2 - \frac{1}{2} t g^{-1}(\sigma) \quad (4.3)$$

$$\sigma = \frac{2\alpha z}{\tau_0^2} \quad (4.4)$$

$$k = \frac{\sigma}{(1 + \sigma^2)\tau_0^2} \quad (4.5)$$

$$\tau^2(z) = (1 + \sigma^2)\tau_0^2 \quad (4.6)$$

$$\alpha = \left| \frac{d^2\beta}{d\omega^2} \right|. \quad (4.7)$$

O termo de fase da equação (4.2) é seguido pela oscilação do pulso de saída não periódico. Agora tendo a variação do tempo no formato

$$g(t) = A e^{i\zeta(t)} \quad (4.8)$$

a frequência angular instantânea pode ser definida por

$$\omega(t) = \frac{d\zeta}{dt}. \quad (4.9)$$

Logo, se $\zeta(t) = \omega_0 t$, então $\omega = \omega_0$ isto é, a onda é uma senoide pura. Da equação (4.3) nós obtemos a frequência instantânea com o envelope

$$\omega(t) = \frac{d\vartheta}{dt} = \omega_0 + 2k\left(t - \frac{z}{v_g}\right) \quad (4.10)$$

a frequência instantânea varia com o tempo dentro do pulso envelope. Este pulso é dito *chirped*.

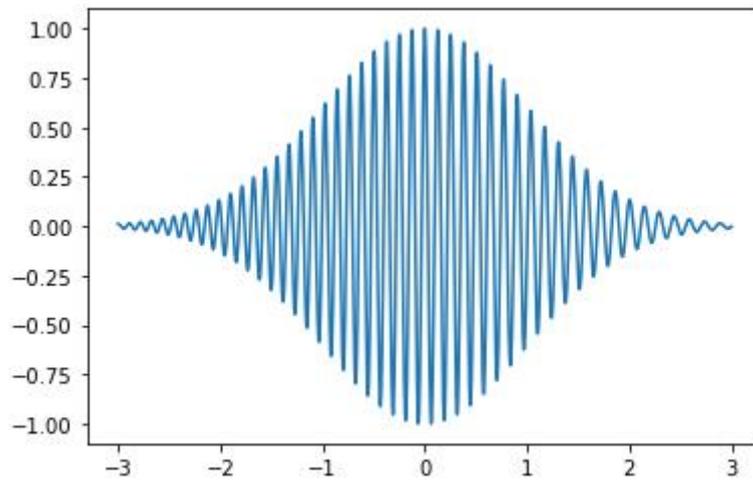


Figura 5 – Efeito *Chirping*, Autor.

Se a GVD, sigla em inglês para dispersão da velocidade de grupo é positiva (dispersão normal), a frequência aumenta no tempo, indicando que as frequências mais altas (“azuis”) surgem posteriormente, ou seja, cauda do pulso. As frequências mais altas possuem menor velocidade de grupo, o que mostra que as frequências “azuis” propagam-se mais lentamente que as frequências “vermelhas”. Para a dispersão anômala ($k < 0$) a situação se inverte; as frequências azuis aparecem na parte frontal do pulso.

4.2. Compressão do *Chirped* Pulse

Considerando um pulso Gaussiano sem o efeito de *chirping*

$$E(z = 0, t) = E_0 e^{-\left(\frac{t}{\tau_0}\right)^2} e^{-i\omega_0 t}. \quad (4.11)$$

A distribuição espectral de um pulso é obtida pela transformada de Fourier

$$A(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} E(t) e^{-i\omega t} dt = \frac{E_0}{2\sqrt{\pi}} \tau_0 \exp \left[-\frac{\tau_0^2 (\omega_0 - \omega)^2}{4} \right]. \quad (4.12)$$

A largura meia altura correspondente da densidade de potência espectral $|A(\omega)|^2$ é

$$\Delta\omega_f = \frac{2}{\tau_0} \sqrt{2 \ln 2} \quad (4.13)$$

das equações acima se obtém

$$\Delta\omega \Delta\tau_f = 4 \ln 2 = 2.8. \quad (4.14)$$

Como discutido anteriormente, quando um pulso estiver se propagando por um meio linear dispersivo (como uma fibra óptica), ele fica alargado no domínio do tempo enquanto a largura do espectro não se altera. Este pulso alargado é *chirped* e a largura temporal satisfaz a relação

$$\Delta\tau'_f > \frac{4 \ln 2}{\Delta\omega_f} \quad (4.15)$$

Pode-se comprimir esse pulso *chirped* propagando-o através de outro meio linear dispersivo, mas com a dispersão tendo um sinal oposto ao do primeiro meio. Portanto, se o *chirping* é devido à propagação através da fibra operando acima do comprimento de onda de dispersão zero, pode-se conseguir compressão pela propagação através de outra fibra operando abaixo do comprimento de onda de dispersão zero. Esse conceito está, de fato, sendo explorado como um equalizador óptico ou compensador de dispersão em sistemas de comunicação de fibra óptica.

Para adquirir a compressão do pulso além da largura inicial do pulso, primeiro tem-se que alargar o conteúdo espectral do pulso (sem nenhum alargamento no domínio do tempo) e, em seguida, usando dispersão (com o sinal apropriado) a largura temporal do pulso pode ser reduzida abaixo da largura do pulso inicial. Isso pode ser feito utilizando efeitos não lineares na fibra, como ainda será discutido nesse trabalho.

4.3. Propagação do pulso *Chirped* através de um meio linear dispersivo

Demonstramos como um pulso *chirped* pode ser comprimido conforme se propaga através de um meio dispersivo com um sinal específico do coeficiente de dispersão. Considere um pulso *chirped* Gaussiano em $z=0$

$$E(z = 0, t) = E_0 e^{-\frac{t^2}{\tau_0^2}} e^{i(\omega_0 t - \frac{t^2}{\tau^2} g)} \quad (4.16)$$

onde g é conhecido como parâmetro de *chirp*; $g < 0$ corresponde a aumentar o *chirp* no qual a frequência instantânea aumenta da borda anterior à posterior, enquanto $g > 0$ corresponde a diminuir o *chirp* quando o oposto ocorre. O espectro $A(\omega)$ do pulso é dado por

$$A(\omega) = \frac{E_0 \tau}{2\sqrt{\pi}(1+ig)^{\frac{1}{2}}} \exp \left[\frac{-(\omega - \omega_0)^2 \tau^2}{4(1+ig)} \right]. \quad (4.17)$$

A potência espectral correspondente será dada por

$$S(\omega) = |A(\omega)|^2 = \frac{E_0^2 \tau^2}{4\pi(1+ig)^{\frac{1}{2}}} \exp \left[\frac{-(\omega - \omega_0)^2 \tau^2}{2(1+g^2)} \right] \quad (4.18)$$

logo, a largura a meia altura é

$$\Delta\omega_f = \frac{2\sqrt{2\ln 2} \cdot \sqrt{1+g^2}}{\tau} \quad (4.19)$$

com isso a largura temporal é dada pela equação

$$\Delta\tau_f = \tau\sqrt{2\ln 2} \quad (4.20)$$

Assim, para o pulso

$$\Delta\omega\Delta\tau_f = 4\ln 2\sqrt{1+g^2} \quad (4.21)$$

Então, para o pulso *chirped* esta relação é sempre maior que o valor mínimo $4\ln 2$.

4.4. Compensação de Dispersão do pulso Gaussiano

Anteriormente mostramos que o pulso representado por

$$E(z = 0, t) = E_0 e^{-\frac{t^2}{\tau_0^2}} e^{-i\omega_0 t} \quad (4.22)$$

depois de se propagar por uma fibra de comprimento L se torna

$$E(z = 0, t) = E_0 \sqrt{\frac{\tau_0^2}{\tau_0^2 + 2i\alpha L}} e^{-\frac{t^2}{(\tau_0^2 + 2i\alpha L)}} e^{i\omega_0 t} \quad (4.23)$$

onde α representa a propriedade de dispersão da fibra e é dado pela equação 4.7. Com isso, a propagação através da fibra altera

$$\tau_0^2 \rightarrow \tau_0^2 + 2i\alpha L \quad (4.24)$$

e

$$E_0 \rightarrow E_0 \sqrt{\frac{\tau_0^2}{\tau_0^2 + 2i\alpha L}} \quad (4.25)$$

Portanto, se considerarmos um pulso de entrada *chirped* dado por

$$E_0 \sqrt{\frac{\tau_0^2}{\tau_0^2 + 2i\alpha L}} e^{-\frac{t^2}{(\tau_0^2 + 2i\alpha L)}} e^{i\omega_0 t} \quad (4.26)$$

se propagar através de um comprimento L' de fibra e parâmetro de dispersão α' , então usando a forma dada pelas equações 4.24 e 4.25, o pulso de saída seria

$$E_0 \sqrt{\frac{\tau_0^2}{\tau_0^2 + 2i(\alpha L + \alpha' L')}} e^{i\omega_0 t} \exp\left[\frac{-t^2}{\tau_0^2 + 2i(\alpha L + \alpha' L')}\right]. \quad (4.27)$$

Assim, o pulso será comprimido para a sua largura original τ_0 se

$$\alpha L + \alpha' L' = 0 \rightarrow \alpha' L' = -\alpha L \quad (4.28)$$

Uma vez que

$$\alpha = \frac{-\lambda_0 D}{2\pi c} \quad (4.29)$$

onde D é o coeficiente de dispersão da fibra, a equação (4.28) também pode ser expressa como

$$D' L' = -DL \quad (4.30)$$

Note que além do comprimento L' , o pulso sofrerá alargamento novamente.

Para certas instalações utiliza-se a fibra DCF (Fibra Compensadora de Dispersão) [1] que é uma fibra especial capaz de compensar a dispersão, onde seu coeficiente D é negativo e λ_0 maior que 1550nm.

O comprimento do DCF depende do coeficiente de dispersão. O DCF deve ser projetado para ter a menor perda possível (incluindo perda por emenda para

a transmissão da fibra bem como perda de propagação). As perdas adicionais precisam ser compensadas pelo uso de amplificadores ópticos.

5. Sólitons Ópticos

5.1. Condições para obtenção do Sóliton

Antes a fibra estava sendo tratada como um meio linear, ou seja, a intensidade está diretamente atrelada à propagação do pulso óptico. Na prática, todos os meios exibem efeitos não lineares. No caso de fibras de sílica, uma das manifestações da não linearidade é o índice de refração dependente da intensidade de acordo com a seguinte equação

$$n = n_0 + n_2 I \quad (5.1)$$

onde n_0 é o índice linear de refração da sílica (para baixas intensidades), n_2 é o coeficiente de índice de refração não linear, e $I = P/A_{ef}$ é a intensidade efetiva dentro do meio com P sendo a potência transportada pelo modo e A_{ef} a área efetiva do modo da fibra. Para fibras de sílica monomodo operando a 1550nm [1]

$$n_0 = 1,46, n_2 = 3,2 \cdot 10^{-20} \frac{m^2}{W}, A_{ef} = 50 \mu m^2. \quad (5.2)$$

Nas fibras ópticas de sílica, se o comprimento de onda operacional estiver acima do comprimento de onda de dispersão zero, então as frequências mais altas viajam mais rápido do que as frequências mais baixas e o alargamento do pulso na ausência de qualquer efeito não linear é acompanhado de um *chirping* dentro do pulso, a frequência instantânea diminui com o aumento do tempo.

A auto modulação de fase, da sigla em inglês SPM (*Self Phase Modulation*) leva a um *chirping* com baixas frequências na borda da frente e maiores frequências na borda de trás, que é exatamente o oposto do *chirping* causado pela dispersão linear na região do comprimento de onda acima do comprimento de onda de dispersão zero; portanto, pela escolha apropriada do formato do pulso (forma de uma secante hiperbólica) e a potência carregada pelo pulso, podemos realmente compensar um efeito com o outro. Neste caso, o pulso se propagaria sem distorção por uma compensação mútua de dispersão e SPM. Tal pulso não se alargaria nem no domínio do tempo (como na dispersão linear) nem no domínio da frequência (como no SPM) e é chamado de sóliton. Uma vez que um pulso solitônico não se alarga durante sua propagação, ele tem tremendo

potencial para aplicações em sistemas de comunicação óptica de largura de banda super alta.

Para a propagação de um sólton de comprimento de onda por volta de 1550 nm, a pico de potência do pulso (em mW) e a duração do pulso estão relacionadas através da equação

$$P = \frac{1,5 \cdot 10^3 D}{\tau_f^2} \quad (5.3)$$

onde D é o coeficiente de dispersão em os/km.nm e τ_f é a largura a meia altura do pulso em picosegundos.

5.2. Alto Modulação de Fase

Em um meio linear a polarização elétrica é assumida por uma função linear do campo elétrico

$$P = \epsilon_0 \chi E \quad (5.4)$$

onde, para simplificar, uma relação de escala foi estabelecida. A quantidade χ é a chamada suscetibilidade dielétrica linear. Em altas intensidades ópticas (ou equivalentemente a altos campos ópticos) todos os meios se comportam não linearmente, ou seja, a relação expressa na equação (5.4) é aproximada para

$$P = \epsilon_0 \chi E + \epsilon_0 \chi^{(2)} E^2 + \epsilon_0 \chi^{(3)} E^3 + \dots \quad (5.5)$$

para meios não cristalinos tais como a fibra óptica $\chi^{(2)} = 0$ e a não linearidade de ordem inferior é devida a $\chi^{(3)}$.

Considerando uma onda plana óptica com um campo elétrico variável da forma

$$E = E_0 \cos(\omega t - kz) \quad (5.6)$$

então

$$P = \epsilon_0 \chi E_0 \cos(\omega t - kz) + \epsilon_0 \chi^{(3)} E_0^3 \cos^3(\omega t - kz) \quad (5.7)$$

consequentemente,

$$P = \epsilon_0 \left(\chi + \frac{3}{4} \chi^{(3)} E_0^2 \right) E_0 \cos(\omega t - kz) + \epsilon_0 \frac{\chi^{(3)}}{4} E_0^3 \cos 3(\omega t - kz) \quad (5.8)$$

O segundo termo na equação corresponde a geração do terceiro harmônico, que é insignificante na fibra óptica devido a incompatibilidade de fase entre frequências ω e 3ω . A polarização na frequência ω é

$$P = \epsilon_0 \left(\chi + \frac{3}{4} \chi^{(3)} E_0^2 \right) E_0 \cos(\omega t - kz). \quad (5.9)$$

Para uma onda plana dada pela equação 6.6, a intensidade é dada por

$$I = \frac{1}{2} c \epsilon_0 n_0 E_0^2 \quad (5.10)$$

deixando tudo em função do campo elétrico

$$E_0^2 = \frac{2I}{c \epsilon_0 n_0} \quad (5.11)$$

onde n_0 é o índice de refração do meio para baixos campo. Portanto

$$P = \epsilon_0 \left(\chi + \frac{3\chi^{(3)}}{2c \epsilon_0 n_0} I \right) E_0 \cos(\omega t - kz) \quad (5.12)$$

A relação geral entre polarização e índice de refração é dado por

$$P = \epsilon_0 (n^2 - 1) E_0 \cos(\omega t - kz) \quad (5.13)$$

Comparando as equações 5.12 e 5.13, vemos que o termo não linear contendo $\chi^{(3)}$ leva para um índice de refração dependente da intensidade

$$n^2 = 1 + \chi + \frac{3\chi^{(3)}}{2c \epsilon_0 n_0} I \quad (5.14)$$

Uma vez que o último termo na equação acima é usualmente muito pequeno mesmo para feixes de luz muito intensos, nós podemos aproximar por uma expansão na série de Taylor

$$n = n_0 + \frac{3}{4} \chi^{(3)} + \frac{I}{c \epsilon_0 n_0^2} \quad (5.15)$$

onde

$$n_0^2 = 1 + \chi \quad (5.16)$$

e

$$n_2 = \frac{3\chi^{(3)}}{4c \epsilon_0 n_0^2} \quad (5.17)$$

Para fibras de sílica fundida [1]

$$n_0 = 1.46, n_2 = 3.2 \cdot 10^{-20} \frac{m^2}{W} \quad (5.18)$$

Considerando a propagação de um modo transportando 100mW de potência em uma fibra monomodo com uma área efetiva = $50 \mu m^2$, então a intensidade resultante é $2 \cdot 10^9 W/m^2$ [1] e a alteração no índice de refração devido aos efeitos não lineares é

$$\Delta n = n_2 I = 6,4 \cdot 10^{-11}$$

Apesar dessa mudança no índice de refração parecer muito pequena, devido a comprimentos de interação muito longos (10 – 10000 km) na fibra óptica, os efeitos acumulados se tornam significativos. De fato, esse pequeno termo não linear é responsável para a formação de sólitons.

Se P é a potência transportada por um modo na fibra óptica, uma vez que o modo de propagação tem uma distribuição de intensidade transversal, I na equação 5.15 representa a intensidade efetiva dentro de uma fibra que pode ser aproximadamente escrita como

$$I = \frac{P}{A_{ef}} \quad (5.19)$$

onde A_{ef} representa a área efetiva do modo da fibra. Se usamos a aproximação Gaussiana para o modo fundamental, então

$$A_{ef} = \pi \omega_0^2 \quad (5.20)$$

onde ω_0 é o tamanho do ponto Gaussiano do modo. Portanto, para uma fibra podemos escrever

$$n = n_0 + n_2 \frac{P}{A_{ef}}. \quad (5.21)$$

Essa mudança no índice de refração leva a uma mudança correspondente no índice efetivo do modo. Portanto, se β_0 é a constante de propagação no caso linear então a nova constante de propagação pode aproximadamente ser escrita como

$$\beta = \beta_0 + \frac{k_0 P n_2}{A_{ef}} \quad (5.22)$$

consequentemente, uma onda incidente da forma $Ae^{i\omega_0 t}$ iria emergir como

$$Ae^{i(\omega_0 t - \beta z)} = A \exp \left[i \left(\omega_0 t - \beta_0 z - \frac{k_0 P n_2}{A_{ef}} z \right) \right]. \quad (5.23)$$

Se a onda de entrada é um pulso com uma variação de potência dada por $P(t)$ então a fase de saída seria

$$\exp \left[i \left(\omega_0 t - \beta_0 z - \frac{k_0 P n_2}{A_{ef}} z \right) \right] \quad (5.24)$$

Uma vez que $P(t)$ é uma função do tempo, o pulso de saída é *chirped*. Isso é denominado SPM em que a variação de potência com o pulso leva a própria modulação de fase.

Como dito anteriormente, se pode definir uma frequência instantânea dentro do pulso

$$\omega(t) = \omega_0 + \frac{k_0 z n_2}{A_{ef}} \frac{dP}{dt} \quad (5.25)$$

Como um exemplo, se nós consideramos um pulso de entrada Gaussiano dado por

$$E(z = 0, t) = E_0 e^{-\frac{t^2}{\tau_0^2}} e^{i\omega_0 t} \quad (5.26)$$

então depois de se propagar através do comprimento L da fibra óptica, o pulso se torna

$$E(z = L, t) = E_0 \exp \left[- \left(t - \frac{L}{v_g} \right)^2 / \tau_0^2 \right] \cdot \exp \left[i \left(\omega_0 t - \beta_0 L - \frac{k_0 P(t) n_2}{A_{ef}} L \right) \right] \quad (5.27)$$

onde β_0 , v_g e A_{ef} representam, respectivamente, a constante de propagação, velocidade de grupo e área efetiva do modo fundamental da fibra, nós temos

desprezado os efeitos de dispersão. A quantidade $P(t)$ representa uma variação temporal da potência no pulso que é dado por

$$E(z, t) = P_0 \exp \left[-2 \left(t - \frac{z}{v_g} \right)^2 / \tau_0^2 \right] \quad (5.28)$$

portanto, a frequência instantânea é dada por

$$\omega(t) = \omega_0 + \frac{k_0 z n_2}{A_{ef}} \cdot \frac{4T}{\tau_0^2} P_0 e^{-2T^2/\tau_0^2} \quad (5.29)$$

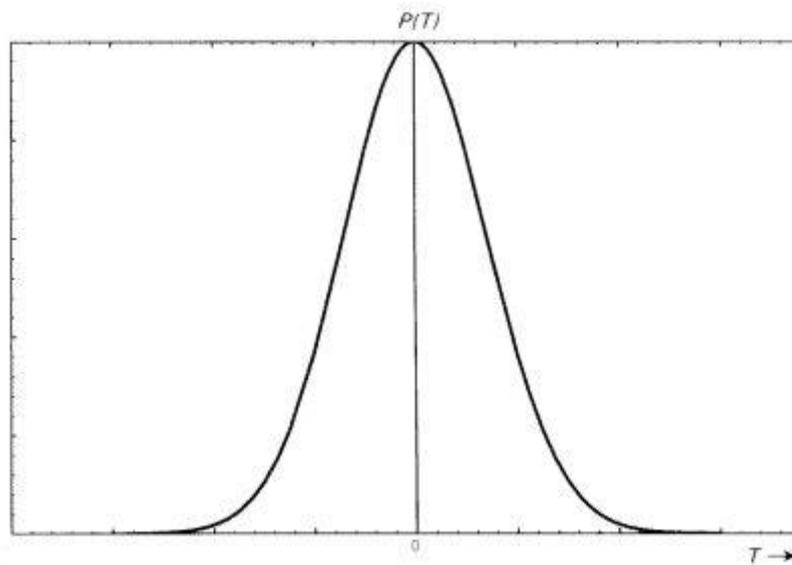


Figura 6 – Pulso com potência variando no tempo, [1].

onde

$$T = t - \frac{z}{v_g} \quad (5.30)$$

representa o tempo no referencial do movimento. As equações acima mostram claramente que a não linearidade leva ao alargamento espectral do pulso deixando o envelope do pulso inalterado. A Figura 4 mostra a variação de $P(t)$ para um pulso Gaussiano. Da equação (5.25) temos o excesso da largura espectral resultante da SPM

$$\Delta V_{\text{SPM}} \approx \frac{n_2 L_{ef}}{\lambda_0 A_{ef}} \frac{dP}{dt} \quad (5.31)$$

onde L_{ef} é o comprimento efetivo da fibra sobre a qual o pulso de luz propagando (que está se atenuando exponencialmente) pode ser assumido como tendo uma intensidade média aproximadamente constante. Se α é o coeficiente de perda da fibra de comprimento L , então

$$L_{ef} \approx \int_0^L e^{-\alpha z} = \frac{1-e^{-\alpha L}}{\alpha}. \quad (5.32)$$

Portanto, se $\alpha L \ll 1$, então $L_{ef} \approx L$ e se $\alpha L \gg 1$, então $L_{ef} \approx 1/\alpha$. Em 1550nm, $\alpha \approx 0,2\text{dB/km}$ e para $\alpha L \gg 1$, $L_{ef} \approx 20\text{km}$. [1]

Se assumimos

$$\frac{dP}{dt} \approx \frac{P}{\tau_0} \approx P\Delta\nu_P \quad (5.33)$$

onde τ_0 é a largura do pulso de entrada que é o inverso da largura espectral do pulso $\Delta\nu$ e P é a potência de pico do pulso, então para $\Delta\nu_{SPM} = \Delta\nu_P$ temos

$$PL_{ef} \approx \frac{\lambda_0 A_{ef}}{n_2} \approx 2,5 \cdot 10^3 \text{mW} \cdot \text{km} \quad (5.34)$$

onde para fibras de sílica operando a 1550nm o coeficiente não linear $n_2 \approx 3,2 \cdot 10^{-20} \text{m}^2/\text{W}$, $A_{ef} \approx 50\mu\text{m}^2$ [1]. Consequentemente, se amplificadores ópticos são usados para compensar qualquer perda, então para $L_{ef} = 1000\text{km}$, uma potência de pico do pulso de 3mW vai levar a um alargamento espectral por um fator de dois.

5.3. Derivação Heurística da potência do sóliton

Anteriormente foi visto que a dispersão produz *chirping* no pulso. Para um pulso Gaussiano de entrada, a frequência instantânea dentro do envelope de pulso é dada por

$$\omega_d(t) = \omega_0 + \frac{2\sigma}{(1+\sigma^2)\tau_0^2} \left(t + \frac{z}{v_g} \right) \quad (5.35)$$

onde

$$\sigma = \frac{2\alpha z}{\tau_0^2} \quad (5.36)$$

e

$$\alpha = \frac{\lambda_0^3}{2\lambda c^2} \frac{d^2 n}{d\lambda_0^2} \quad (5.37)$$

Similarmente, como apresentado antes, por conta do índice de refração dependente da intensidade, o pulso fica *chirped* sem nenhum alargamento. A frequência instantânea correspondente (próximo ao centro do pulso) é dada pela equação 5.29

$$\omega_{nl}(t) = \omega_0 + \frac{4 k_0 z n_2}{\tau_0^2} \cdot \left(t - \frac{z}{v_g}\right) \frac{P_0}{A_{ef}} \quad (5.38)$$

onde P_0 é a potência de pico transportada pelo pulso e A_{ef} é a área efetiva do modo da fibra.

Se os efeitos de *chirping* devido à dispersão e não linearidade se cancelassem, então teríamos um pulso que permaneceria inalterado nos domínios do tempo e da frequência. Este seria o sóliton.

Para cancelar os dois *chirps*, σ na equação 6.35 tem que ser negativo. Portanto, tal sóliton pode ser formado somente no regime de dispersão de velocidade do grupo negativo.

Para que um sóliton seja formado, é preciso que em distâncias de propagação infinitesimais, os *chirpings* produzidos pela dispersão e não linearidade se cancelem. Logo, na equação 6.35 assumimos $\sigma \ll 1$ e igualamos o *chirping* devido à dispersão e à não linearidade para obtermos

$$\frac{4 k_0 z n_2}{\tau_0^2} \frac{P_0}{A_{ef}} = \frac{-2\sigma}{\tau_0^2} = \frac{-4\alpha z}{\tau_0^4} \quad (5.39)$$

ou

$$P_0 = \frac{|\alpha| A_{ef}}{k_0 \tau_0^2 n_2} \quad (5.40)$$

O coeficiente de dispersão D da fibra óptica é dado por

$$D = \frac{-2\pi c \alpha}{\lambda_0^2} = \frac{-\lambda_0}{c} \frac{d^2 n}{d\lambda_0^2} \quad (5.41)$$

Portanto, a equação 5.40 dado aproximadamente pela equação para o pico da potência no pulso

$$P_0 \approx \frac{\lambda_0^3 |D| A_{\text{ef}}}{4\pi^2 c \tau_0^2 n_2} \quad (5.42)$$

Analisando com os valores adotados

$$P_0 \approx 0,776 \frac{\lambda_0^3 |D| A_{\text{ef}}}{\pi^2 c \tau_f^2 n_2} \quad (5.43)$$

onde

$$\tau_f = \tau_0 \sqrt{2 \ln 2} \approx 1,18 \tau_0 \quad (5.44)$$

Em termos da largura a meia altura, se torna

$$P_0 \tau_f^2 \approx \frac{0,35 \lambda_0^3 |D| A_{\text{ef}}}{\pi^2 c n_2} \quad (5.45)$$

que é diferente de um cálculo mais preciso por um fator de 2. Para as fibras de sílica operando a 1550nm [1].

$$\lambda_0 = 1550 \text{nm}, n_2 \approx 3,2 \cdot 10^{-20} \frac{\text{m}^2}{\text{W}}, A_{\text{ef}} \approx 50 \mu\text{m}^2$$

obtemos

$$P_0 \tau_f^2 \approx 1,5 \cdot 10^3 D \quad (5.46)$$

onde P_0 , τ_f e D são mensurados em mW, ps e os/km.nm, respectivamente. Para uma fibra CSF (com dispersão zero e comprimento de onda em 1300nm), $D \approx 18 \text{ps} / \text{km.nm}$ (à 1550nm) [1] e obtemos

$$P_0 \tau_f^2 \approx 2,7 \cdot 10^4 \text{mW} \cdot \text{ps}^2.$$

Logo, a potência necessária para a formação de um sóliton com uma largura a meia altura de 10ps[1] é

$$P_0 \approx 270 \text{mW}.$$

Por outro lado, para uma fibra DSF (com dispersão zero para comprimentos de onda por volta de 1550nm), assumindo $D \approx 1 \text{ps} / \text{km.nm}$ [1] obtemos

$$P_0 \tau_f^2 \approx 1500 \text{mW} \cdot \text{ps}^2.$$

Portanto, a potência necessária para um sólito com 10ps [1] é

$$P_0 \approx 15\text{mW}.$$

Para uma taxa de transmissão abaixo de 20Gb/s, a largura de um pulso solitônico é tipicamente de 20ps e precisa de um pico de potência de somente alguns mW, o que é facilmente alcançável com lasers de diodos.

5.4. Equação de Schrödinger não linear

A evolução de um pulso óptico se propagando através de um meio dispersivo não linear é aproximadamente governada pela equação:

$$-i \left(\frac{\partial f}{\partial z} + \frac{1}{v_g} \frac{\partial f}{\partial t} \right) - \frac{1}{2} \alpha \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} + \Gamma |f|^2 f = 0 \quad (5.47)$$

onde

$$\frac{1}{v_g} = k' = \frac{dk}{d\omega} \quad (5.48)$$

$$\alpha = k'' = \frac{d^2k}{d\omega^2} \quad (5.49)$$

$$\Gamma = \frac{1}{2} \omega_0 \varepsilon_0 n_0 n_2 \quad (5.50)$$

e $f(z, t)$ representa o termo envelope do pulso

$$E(z, t) = e^{i(\omega_0 t - k(\omega_0)z)} \cdot f(z, t) \quad (5.51)$$

com

$$k(\omega_0) = \frac{\omega_0}{c} n_0. \quad (5.52)$$

O segundo termo do lado esquerdo da equação (5.47) é proporcional a alfa e representa o termo de dispersão; o último termo da esquerda corresponde ao termo não linear. A seguir iremos justificar esta equação.

5.4.1. Propagação na presença da dispersão

Incluindo na equação o termo de segunda ordem na equação que indica a dispersão, porém, sem adicionar o termo da não linearidade para obter

$$-i \frac{\partial f(z,t)}{\partial t} - \frac{1}{2} \alpha \frac{\partial^2 f(z,T)}{\partial T^2} = 0 \quad (5.53)$$

utilizando o método de separação de variáveis

$$\begin{aligned} \frac{\partial f(z,t)}{\partial z} &= \frac{\partial f(z,T)}{\partial z} + \frac{\partial f(z,T)}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial z} = \frac{\partial f(z,T)}{\partial z} - \frac{1}{v_g} \frac{\partial f(z,T)}{\partial z} \\ \frac{\partial f(z,t)}{\partial t} &= \frac{\partial f(z,T)}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial t} + \frac{\partial f(z,T)}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial f(z,t)}{\partial T} \end{aligned}$$

a solução para a equação acima

$$f(z,t) = \int A(\Omega) e^{i(\Omega T - \frac{1}{2} \alpha \Omega^2 z)} d\Omega \quad (5.54)$$

obviamente $A(\Omega)$ representa o espectro de frequências do pulso de entrada.

Obtivemos a equação acima antes e a avaliamos para um pulso temporal Gaussiano. O pulso sofreu alargamento e *chirping* devido à dispersão.

5.4.2. Propagação na presença da não linearidade

Desprezando agora o segundo termo da equação (5.47) e mantendo somente o termo da não linearidade sozinho temos nossa equação na forma

$$-i \left(\frac{\partial f}{\partial z} + \frac{1}{v_g} \frac{\partial f}{\partial t} \right) + \Gamma |f|^2 f(z,t) = 0 \quad (5.55)$$

No referencial em movimento, a equação se torna

$$-i \frac{\partial f(z,T)}{\partial z} + \Gamma |f|^2 f(z,T) = 0 \quad (5.56)$$

se multiplicarmos a equação acima por f^* e o seu complexo conjugado por f e subtrairmos, obtemos

$$\frac{\partial |f|^2}{\partial z} = 0 \quad (5.57)$$

que tem a solução geral

$$|f|^2 = F(T) = F\left(t - \frac{z}{v_g}\right). \quad (5.58)$$

Portanto, se a não linearidade for muito fraca, o quadrado absoluto do envelope de onda $|f|^2$ mantém sua forma enquanto se propaga pela fibra. Por isso, a solução da equação assume a forma

$$f(z, T) = f_0(T) e^{-i\vartheta(z, T)} \quad (5.59)$$

onde $f_0(T)$ e $\vartheta(z, T)$ são assumidos como funções reais. Utilizando as equações (5.56) e (5.59) temos

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial z} = \Gamma |f_0(T)|^2. \quad (5.60)$$

Portanto

$$\vartheta(z, T) = \vartheta_0 + \Gamma |f_0(T)|^2 z \quad (5.61)$$

onde

$$\vartheta_0 = \vartheta(T, 0) \quad (5.62)$$

Podemos considerar $\vartheta_0 = 0$, que produz

$$f(z, T) = f_0(T) \exp[-i\Gamma |f_0(T)|^2 z] \quad (5.63)$$

implicando que a não linearidade leva à modulação de fase que é diretamente proporcional à intensidade do pulso e a distância de propagação. Esse é o fenômeno da SPM. Portanto, o campo elétrico é dado por

$$E(z, t) = f_0\left(t - \frac{z}{v_g}\right) \exp\left[i\left\{\omega_0 t - \Gamma \left|f_0\left(t - \frac{z}{v_g}\right)\right|^2 z - k(\omega_0)z\right\}\right] \quad (5.64)$$

Correspondendo a essa SPM há uma modulação de frequência dada por

$$\Delta\omega = -\Gamma z \frac{\partial}{\partial x} \left[\left| f_0\left(t - \frac{z}{v_g}\right) \right|^2 \right]. \quad (5.65)$$

Está claro pela análise acima que a não linearidade leva ao alargamento do espectro, mantendo o envelope do pulso inalterado.

5.5. Solução da Equação de Schrödinger não linear

O perfil solitônico, solução da equação de Schrödinger não linear [1] em dois pontos diferentes da fibra, $z=0$ e $z=L$ que tem o formato de uma secante hiperbólica de amplitude E_0 , dado por

$$f(z, t) = E_0 \operatorname{sech} \left[\gamma \left(t - \frac{z}{v_g} \right) \right] e^{-igz} \quad (5.66)$$

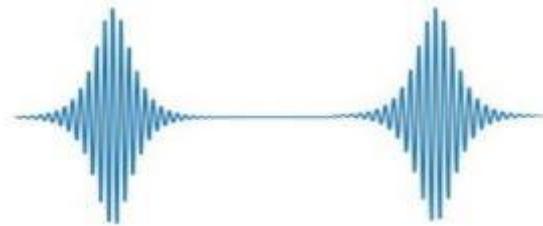


Figura 7 – Perfil do Sóliton, Autor.

Neste trabalho apresentamos as propriedades típicas dos sólitons ópticos que se propagam em fibras ópticas. É evidente o potencial tecnológico inerente a este tipo de onda na transmissão de dados de um sistema de comunicação, tendo em vista que para a produção de um sóliton com comprimento de onda igual a 1550nm a potência necessária é facilmente alcançável.

6. Conclusão

O sólito por manter a sua forma inalterada, apresenta a conservação de energia o que torna sua aplicação em sistemas não somente ópticos muito vasta. Sua importância para o desenvolvimento da ciência é enorme, como por exemplo, para as áreas da telecomunicação, por possibilitar uma melhora na qualidade de comunicação.

Com as propriedades do sólito óptico é possível construir um sistema em pequena escala (rede doméstica) com a certeza da reprodução do sólito, porém, ainda não é viável criar um sistema em uma escala maior, pois o custo para a produção do sistema seria muito elevado, além da dificuldade de construção do sistema.

Os estudos na área de física teórica ainda estão sendo feitos e cada vez mais, em parceria com o avanço tecnológico, novas tecnologias são criadas para melhorar a vida da sociedade como um todo.

7. Referências

- [1] G. Ajoy, Introduction to Fiber Optics, Cambridge University Press, 1994.
- [2] P. G. Drazin and R. S. Johnson, Solitons: an introduction, Cambridge University Press, 1996.
- [3] M. Remoissenet, Waves called solitons: concepts and experiments, Springer-Verlag, 1999
- [4] L. F. Mollenauer, R. H. Stolen and J. P. Gordon, Experimental Observation of Picosecond Pulse Narrowing and Solitons in Optical Fibers, Physical Review Letters, 1980.

Apêndice: Desenvolvimento da Equação de Schrödinger não linear

Procurando por uma solução no formato

$$f(z, T) = E_0 \psi(T) e^{-i\phi(z)} \quad (\text{A.1})$$

onde E_0 representa o pico do campo elétrico e a função envelope $\psi(T)$ assumisse ser uma função real de T . O termo de fase assumisse ser independente do tempo então ele não apresentará *chirping*. Substituindo a equação A.1 na equação 5.55, temos

$$-\frac{d\phi}{dz} E_0 \psi(T) - \frac{1}{2} \alpha E_0 \frac{d^2 \psi}{dT^2} + \Gamma E_0^3 \psi^3(T) = 0 \quad (\text{A.2})$$

ou

$$-\frac{d\phi}{dz} = \frac{1}{2} \alpha \frac{1}{\psi(T)} \frac{d^2 \psi}{dT^2} - \Gamma E_0^2 \psi^2(T) = \frac{1}{2} K \quad (\text{A.3})$$

Analisando que o lado esquerdo depende somente de z e o lado direito somente de T , integrando, temos

$$\phi(z) = -\frac{1}{2} K z \quad (\text{A.4})$$

onde negligenciaremos a constante de integração. Reescrevendo a equação A.3, teremos

$$\frac{d^2 \psi}{dT^2} - \frac{2\Gamma}{\alpha} E_0^2 \psi^3(T) - \frac{K}{\alpha} \psi(T) = 0 \quad (\text{A.5})$$

Multiplicando a equação A.5 por $2d\psi/dT$ e rearranjando para obter

$$\frac{d}{dT} \left[\left(\frac{d\psi}{dT} \right)^2 - \frac{\Gamma}{\alpha} E_0^2 \psi^4(T) - \frac{K}{\alpha} \psi^2(T) \right] = 0 \quad (\text{A.6})$$

Portanto

$$\left(\frac{d\psi}{dT} \right)^2 = \frac{\Gamma}{\alpha} E_0^2 \psi^4(T) + \frac{K}{\alpha} \psi^2(T) + C \quad (\text{A.7})$$

onde C é a constante de integração. Agora, para um soliton localizado devemos esperar

$$\lim_{T \rightarrow \pm\infty} \psi(T) = 0 \quad (\text{A.8})$$

e

$$\lim_{T \rightarrow \pm\infty} \frac{d\psi}{dT} = 0 \quad (\text{A.9})$$

Portanto

$$C = 0 \quad (\text{A.10})$$

implicando

$$\left(\frac{d\psi}{dT}\right)^2 = \frac{\Gamma E_0^2}{\alpha} \psi^4(T) + \frac{K}{\alpha} \psi^2(T) \quad (\text{A.11})$$

Para um soliton localizado, $\psi(T)$ precisa ter um máximo e sem nenhuma perda se pode escolher o valor de E_0 , então para o valor máximo de $\psi(T)$ é unitário. Desde que o máximo valor $d\psi/dT = 0$, nós precisamos ter

$$\psi = 1, \text{ onde } \frac{d\psi}{dT} = 0 \quad (\text{A.12})$$

o que implica

$$\frac{\Gamma E_0^2}{\alpha} + \frac{K}{\alpha} = 0 \quad (\text{A.13})$$

ou

$$K = -\Gamma E_0^2 \quad (\text{A.14})$$

Desde n_2 (e portanto Γ) é uma quantidade positiva, K precisa ser negativo.

Usando valores acima de K , escrevemos

$$\frac{d\psi}{dT} = \gamma \psi \sqrt{1 - \psi^2} \quad (\text{A.15})$$

onde

$$\gamma = \left(\frac{K}{\alpha}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(-\frac{\Gamma}{\alpha}\right)^{\frac{1}{2}} E_0 \quad (\text{A.16})$$

portanto

$$\int \frac{d\psi}{\psi\sqrt{1-\psi^2}} = \gamma \int dT \quad (\text{A.17})$$

Integrando a equação acima fazendo a substituição

$$\psi = \operatorname{sech}\theta \quad (\text{A.18})$$

portanto

$$\int d\theta = \gamma T \quad (\text{A.19})$$

ou

$$\psi(T) = \operatorname{sech}\theta = \operatorname{sech}(\gamma T) \quad (\text{A.20})$$

Portanto, a solução solitônica da equação 5.47 é dada por

$$f(z, t) = E_0 \operatorname{sech} \left[\gamma \left(t - \frac{z}{v_g} \right) \right] e^{-igz} \quad (\text{A.21})$$

onde

$$g = -\frac{1}{2} \alpha \gamma^2 = \frac{1}{2} \Gamma E_0^2 \quad (\text{A.22})$$