

**FACULDADE DE TECNOLOGIA DE SÃO JOSÉ DOS CAMPOS
FATEC PROFESSOR JESSEN VIDAL**

**DAVI DIAS LIMA
NYKOLI LUCINDA COSTA DA SILVA**

**ANÁLISE DE FLAMBAGEM DE UMA PLACA DE MATERIAL
COMPÓSITO**

São José dos Campos
2026

**DAVI DIAS LIMA
NYKOLI LUCINDA COSTA DA SILVA**

**ANÁLISE DE FLAMBAGEM DE UMA PLACA DE
MATERIAL COMPÓSITO**

Trabalho de Graduação apresentado à Faculdade de Tecnologia de São José dos Campos, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do título de Tecnólogo em Projetos de Estruturas Aeronáuticas.

Orientador Interno ou Orientador: Dr. Lucas Giovanetti

São José dos Campos
2026

Dados Internacionais de Catalogação-na-Publicação (CIP)
Divisão de Informação e Documentação

LIMA, Davi Dias
SILVA, Nykoli Lucinda Costa
Análise de Flambagem de uma Placa de Material Compósito.
São José dos Campos, 2026.
64f.

Trabalho de Graduação – Curso de Tecnologia em Projetos de Estruturas Aeronáuticas.
FATEC de São José dos Campos Professor Jessen Vidal, 2026.
Orientador Interno ou Principal: Titulação Dr. Lucas Giovanetti.

1. Materiais Compósitos. 2. Flambagem. 3. Elementos Finitos. I. Faculdade de Tecnologia.
FATEC de São José dos Campos: Professor Jessen Vidal. Divisão de Informação e
Documentação. II. Título

REFERÊNCIA BIBLIOGRÁFICA

SILVA, Nykoli Lucinda Costa da, LIMA, Davi Dias. Análise de Flambagem de uma Placa de Material Compósito. 2026. 56f. Trabalho de Graduação - FATEC de São José dos Campos: Professor Jessen Vidal.

CESSÃO DE DIREITOS

NOME(S) DO(S) AUTOR(ES): Davi Dias Lima, Nykoli Lucinda Costa da Silva.
TÍTULO DO TRABALHO: Análise de Flambagem de uma Placa de Material Compósito.
TIPO DO TRABALHO/ANO: Trabalho de Graduação/2026.

É concedida à FATEC de São José dos Campos: Professor Jessen Vidal permissão para reproduzir cópias deste Trabalho e para emprestar ou vender cópias somente para propósitos acadêmicos e científicos. O autor reserva outros direitos de publicação e nenhuma parte deste Trabalho pode ser reproduzida sem a autorização do autor.

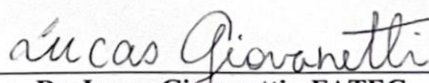
Nykoli Lucinda Costa da
Silva
12283-855, Caçapava - SP

Davi Dias Lima
12247-720, São José dos
Campos - SP

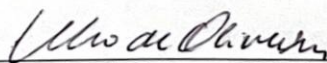
**DAVI DIAS LIMA
NYKOLI LUCINDA COSTA DA SILVA**

**ANÁLISE DE FLAMBAGEM DE UMA PLACA DE
MATERIAL COMPÓSITO**

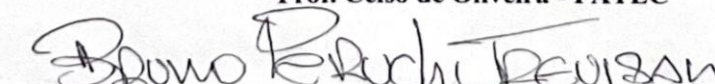
Trabalho de Graduação apresentado à Faculdade de Tecnologia de São José dos Campos, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do título de Tecnólogo em Projetos de Estruturas Aeronáuticas.



Dr. Lucas Giovanetti - FATEC



Prof. Celso de Oliveira - FATEC



Prof. Bruno Peruchi Trevisan - FATEC

11/06/2026

DATA DA APROVAÇÃO

AGRADECIMENTOS

Agradecemos, primeiramente, a Deus, por nos conceder saúde, força, sabedoria e perseverança para superar os desafios encontrados ao longo desta trajetória acadêmica.

Aos nossos familiares, expressamos nossa sincera gratidão pelo apoio, incentivo, compreensão e confiança depositados em nós durante toda a realização deste trabalho. O suporte de vocês foi fundamental para que alcançássemos esta conquista.

Ao nosso orientador Prof. Dr. Lucas Giovanetti, agradecemos a orientação, dedicação, paciência e pelos valiosos conhecimentos compartilhados ao longo do desenvolvimento deste Trabalho de Graduação. Sua contribuição foi essencial para a concretização deste projeto.

Aos professores da Faculdade de Tecnologia, que contribuíram para nossa formação acadêmica e profissional por meio de seus ensinamentos e experiências.

Aos nossos colegas e amigos, agradecemos o companheirismo, apoio e troca de conhecimentos durante toda a jornada acadêmica.

Por fim, agradecemos a todos que, direta ou indiretamente, contribuíram para a realização deste trabalho e para nossa formação pessoal e profissional.

Nosso sincero muito obrigado.

RESUMO

A utilização de materiais compósitos na indústria aeronáutica tem crescido significativamente nas últimas décadas devido à elevada relação resistência-peso e rigidez-peso apresentada por esses materiais, características que contribuem para o desenvolvimento de estruturas mais leves e eficientes. Nesse contexto, a análise de fenômenos de instabilidade estrutural, como a flambagem, torna-se fundamental para garantir a segurança e o desempenho de componentes submetidos a carregamentos compressivos. O presente trabalho tem como objetivo analisar o comportamento de flambagem em painéis compósitos laminados aplicados à engenharia aeronáutica. Para isso, foi realizada uma revisão bibliográfica sobre materiais compósitos, suas aplicações em estruturas aeronáuticas e os principais conceitos relacionados à flambagem de laminados compósitos. Em seguida, foi desenvolvido um modelo numérico utilizando o Método dos Elementos Finitos, por meio do software FEMAP, com o intuito de determinar a carga crítica de flambagem de placas de material compósito laminado submetidas à compressão. Os resultados obtidos foram comparados com dados disponíveis na literatura especializada, permitindo avaliar a consistência do modelo numérico empregado. Entre as configurações estudadas, o laminado [0/90/0] com doze camadas apresentou o melhor desempenho estrutural, atingindo maior Carga Crítica de Flambagem obtido, que representa a carga crítica de flambagem. Conclui-se que a correta definição da orientação das fibras e da arquitetura do laminado constitui um fator determinante para o desempenho de estruturas compósitas submetidas a carregamentos compressivos, evidenciando a importância dessas variáveis no projeto de componentes aeronáuticos.

Palavras-chave: materiais compósitos; flambagem; laminados compósitos; elementos finitos; estruturas aeronáuticas.

ABSTRACT

The use of composite materials in the aerospace industry has grown significantly over the last decades due to their high strength-to-weight and stiffness-to-weight ratios, characteristics that contribute to the development of lighter and more efficient structures. In this context, the analysis of structural instability phenomena, such as buckling, becomes essential to ensure the safety and performance of components subjected to compressive loads. This study aims to analyze the buckling behavior of laminated composite panels applied to aerospace engineering. To achieve this objective, a literature review was conducted on composite materials, their applications in aerospace structures, and the main concepts related to the buckling of laminated composite structures. Subsequently, a numerical model was developed using the Finite Element Method through the FEMAP software to determine the critical buckling load of laminated panels subjected to compression. The results obtained were compared with data available in the specialized literature, allowing the consistency of the numerical model employed to be evaluated. Among the configurations studied, the $[0/90/0]$ laminate with twelve layers presented the best structural performance, achieving the highest critical eigenvalue obtained. It is concluded that the proper definition of fiber orientation and laminate architecture constitutes a determining factor in the performance of composite structures subjected to compressive loads, highlighting the importance of these variables in the design of aerospace components.

Keywords: composite materials; buckling; composite laminates; finite element method; aerospace structures.

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO	9
1.1. Objetivo Geral	10
1.2. Objetivo Específico	10
2. FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA.....	12
2.1. Materiais Compósitos	12
2.2. Compósitos Laminados	13
2.3. Comportamento mecânico dos Laminados.....	15
2.3.1. Materiais Ortotrópicos	16
2.3.2. Estado Plano de Tensão	16
2.3.3. Relações Tensão - Deformação	17
2.3.3.1. Transformação de Coordenadas	18
2.4. Teoria Clássica de Laminação	19
2.5. Flambagem de Estruturas	23
2.5.1. Conceitos Fundamentais de Flambagem	25
2.5.2. Flambagem de Placas Compósitas.....	27
2.5.3. Influência da Orientação das Fibras na Flambagem.....	28
2.6. Método dos Elementos Finitos	29
3. DESENVOLVIMENTO DO TRABALHO.....	32
3.1. Modelo Analisado	32
3.2. Determinação da Tensão Crítica de Flambagem.....	34
3.3. Modelagem Numérica	36
3.4. Malha de elementos finitos.....	37
3.5. Condições de Contorno e Carregamentos	38
3.6. Configurações Analisadas	40
3.7. Procedimento de Análise	42
4. RESULTADOS E DISCUSSÕES	43
4.1. Determinação da Tensão Crítica de Flambagem.....	43
4.2. Resultados do laminado [0/45/0].....	45
4.3. Resultados do laminado [45/0/45].....	50
4.4. Resultados do laminado [0/90/0].....	55
4.5. Comparação geral dos resultados	60
5. CONCLUSÃO.....	61
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....	63

1. INTRODUÇÃO

Os materiais compósitos vêm sendo amplamente empregados em diversas áreas da engenharia devido à sua elevada relação resistência-peso e rigidez-peso, características que os tornam atrativos para aplicações estruturais que exigem redução de massa sem comprometer o desempenho mecânico. Além disso, a possibilidade de adequar as propriedades do material por meio da orientação das fibras e da sequência de empilhamento das lâminas proporciona maior flexibilidade ao projeto estrutural quando comparado aos materiais convencionais (CROUZET-PASCAL, 1978; KASSAPOGLOU, 2010).

Na indústria aeronáutica, a busca constante pela redução do peso estrutural associada ao aumento da eficiência operacional impulsionou a utilização de materiais compósitos em componentes cada vez mais críticos das aeronaves. Inicialmente empregados em estruturas secundárias, esses materiais passaram a ser utilizados em superfícies de controle, fuselagens, asas e outras estruturas primárias devido às suas excelentes propriedades mecânicas e ao potencial de redução de custos operacionais decorrente da diminuição do consumo de combustível (KASSAPOGLOU, 2010). Segundo Días, Arbelo e Almeida (2009), estruturas reforçadas fabricadas em materiais compósitos apresentam elevada eficiência estrutural e são amplamente utilizadas em fuselagens, caixões de asa e empenagens, destacando-se pela elevada resistência e rigidez específicas.

Entre os diversos elementos estruturais empregados na engenharia aeronáutica, os painéis laminados compósitos desempenham papel fundamental na composição de estruturas sujeitas a carregamentos de compressão, cisalhamento e flexão. Nessas condições, além da resistência do material, torna-se necessário avaliar fenômenos de instabilidade estrutural, dentre os quais a flambagem se destaca como um dos principais mecanismos de falha. A flambagem consiste em uma perda de estabilidade que ocorre quando uma estrutura submetida a esforços compressivos atinge determinado valor crítico de carregamento, resultando em deslocamentos transversais significativos mesmo antes da ocorrência da ruptura do material (DASH; SINGH, 2012).

Além da flambagem inicial, diversos projetos aeronáuticos consideram o aproveitamento da capacidade resistente da estrutura após a perda de estabilidade inicial, fenômeno conhecido como pós-flambagem. Conforme destacado por Dash e Singh (2012), a carga de ruptura de placas laminadas pode ser significativamente superior à carga crítica de flambagem, tornando relevante o estudo do comportamento pós-flambagem para

obtenção de projetos mais eficientes e leves. Essa abordagem tem sido amplamente explorada em pesquisas recentes voltadas para estruturas aeronáuticas avançadas, especialmente em painéis reforçados fabricados em materiais compósitos.

Com o avanço dos recursos computacionais, o Método dos Elementos Finitos (MEF) tornou-se uma das principais ferramentas para a análise do comportamento estrutural de laminados compósitos. Essa metodologia possibilita a avaliação da influência de parâmetros geométricos e mecânicos sobre a carga crítica de flambagem, permitindo a obtenção de modelos mais precisos e economicamente viáveis. Estudos recentes têm utilizado modelos numéricos para investigar o comportamento de painéis compósitos submetidos a carregamentos compressivos, contribuindo para o desenvolvimento de estruturas mais leves e eficientes para aplicação aeronáutica (CARDOSO, 2024).

Diante desse contexto, o presente trabalho tem como foco a análise da flambagem em painéis compósitos laminados por meio do Método dos Elementos Finitos, buscando compreender a influência das características do laminado e validar os resultados obtidos por meio da comparação com dados disponíveis na literatura técnica. A pesquisa contribui para o entendimento do comportamento de instabilidade estrutural em materiais compósitos e para o desenvolvimento de soluções mais eficientes aplicadas à engenharia aeronáutica.

1.1. Objetivo Geral

Investigar a influência da orientação das fibras e da espessura de laminados compósitos no comportamento de flambagem de painéis submetidos à compressão uniaxial, utilizando a Teoria de Instabilidade de placas finas, e o Método dos Elementos Finitos para determinar a carga crítica e os modos de flambagem associados.

1.2. Objetivo Específico

Para a consecução deste objetivo geral foram estabelecidos os objetivos específicos:

- Realizar um levantamento bibliográfico sobre materiais compósitos, suas aplicações na indústria aeronáutica e os principais conceitos relacionados ao fenômeno de flambagem estrutural;
- Estudar o comportamento mecânico de painéis laminados compósitos submetidos a carregamentos compressivos;
- Analisar a influência das propriedades dos materiais compósitos e da orientação das lâminas no comportamento de flambagem dos painéis;

- Desenvolver modelos numéricos utilizando o Método dos Elementos Finitos para análise estrutural dos painéis compósitos;
- Simular numericamente a flambagem linear de painéis compósitos por meio do software FEMAP integrado ao solver Nastran;
- Investigar os fatores que influenciam a carga crítica de flambagem em estruturas laminadas compósitas.

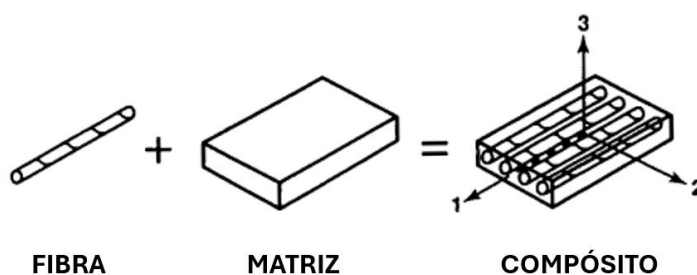
2. FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

2.1. Materiais Compósitos

Os materiais compósitos são constituídos pela combinação de dois ou mais materiais distintos, organizados de forma a atuar conjuntamente, resultando em propriedades mecânicas superiores às apresentadas individualmente por seus constituintes. Em geral, um material compósito é formado por uma fase contínua denominada matriz e por uma fase descontínua denominada reforço, sendo esta última normalmente composta por fibras de elevada resistência mecânica (DANIEL; ISHAI, 2006).

A matriz possui a função de envolver e proteger o material de reforço, além de promover a transferência de esforços entre as fibras. Já o reforço é o principal responsável pela resistência e rigidez do compósito, suportando grande parte das cargas aplicadas à estrutura. A eficiência mecânica do material depende diretamente da interação entre esses constituintes, bem como da geometria, distribuição e orientação das fibras (DANIEL; ISHAI, 2006).

Figura 1. Formação de um material compósito

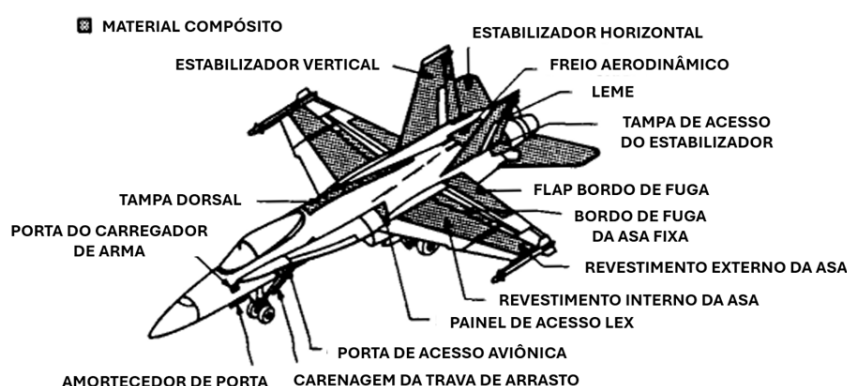


Fonte: Adaptado de (Jones, 1999)

A utilização de materiais compósitos tem crescido significativamente em aplicações estruturais devido à elevada relação resistência-peso e rigidez-peso proporcionada por esses materiais. Em comparação com materiais metálicos convencionais, como alumínio e aço, os compósitos apresentam menor densidade, elevada resistência à corrosão e maior flexibilidade de projeto, permitindo a adequação das propriedades mecânicas às necessidades específicas de cada aplicação (JONES, 1999).

No setor aeronáutico, a utilização de materiais compósitos tornou-se cada vez mais frequente devido à necessidade de redução de peso estrutural sem comprometimento da resistência mecânica. Componentes como asas, painéis de fuselagem, estabilizadores e superfícies de controle empregam extensivamente laminados reforçados com fibras de carbono, contribuindo para o aumento da eficiência operacional das aeronaves e para a redução do consumo de combustível (KASSAPOGLOU, 2010).

Figura 2. Aplicação de materiais compósitos na aeronáutica



Fonte: Adaptado de (Jones, 1999).

Entre os diversos tipos de compósitos existentes, os laminados reforçados com fibras contínuas destacam-se nas aplicações estruturais devido à elevada capacidade de suportar esforços mecânicos. Nesses materiais, a disposição e a orientação das fibras exercem influência direta sobre a rigidez e a resistência da estrutura, tornando-se fatores fundamentais para a análise do comportamento mecânico e da estabilidade estrutural de painéis compósitos submetidos a carregamentos compressivos.

Dessa forma, a compreensão dos conceitos relacionados à constituição e às propriedades dos materiais compósitos constitui a base para o estudo dos laminados estruturais, cujo comportamento mecânico depende não apenas dos materiais constituintes, mas também da forma como as lâminas são organizadas ao longo da espessura da estrutura.

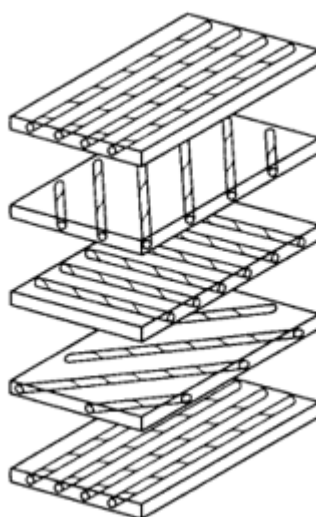
2.2. Compósitos Laminados

Os compósitos laminados constituem uma das formas mais utilizadas de materiais compósitos em aplicações estruturais. Esses materiais são obtidos pelo empilhamento de lâminas individuais, denominadas *laminae* ou *plies*, unidas por meio da matriz polimérica e

organizadas segundo uma sequência previamente definida. A combinação das propriedades de cada lâmina resulta em um comportamento estrutural global que pode ser ajustado de acordo com as exigências de projeto (DANIEL; ISHAI, 2006).

Cada lâmina apresenta normalmente fibras orientadas em uma direção específica, denominada direção principal do material. Como as propriedades mecânicas de uma lâmina reforçada com fibras contínuas dependem fortemente da orientação dessas fibras, a resposta estrutural do laminado torna-se diretamente influenciada pela disposição angular das camadas ao longo da espessura da estrutura (JONES, 1999).

Figura 3. Representação de um laminado composto de multicamadas



Fonte: Adaptado de Jones (1999)

A sequência de empilhamento de um laminado é normalmente representada por uma notação que indica a orientação angular das fibras em cada camada. Por exemplo, um laminado $[0/45/90]$ é constituído por três lâminas cujas fibras estão orientadas a 0° , 45° e 90° em relação ao sistema de referência adotado. A variação dessas orientações possibilita modificar significativamente a rigidez e a resistência da estrutura sem alterar os materiais constituintes (KOLLÁR; SPRINGER, 2003).

Entre as configurações mais empregadas em aplicações estruturais destacam-se os laminados simétricos, balanceados e quase-isotrópicos. Laminados simétricos são caracterizados pela repetição especular das camadas em relação ao plano médio, reduzindo os efeitos de acoplamento entre esforços de membrana e flexão. Essa característica contribui

para um comportamento estrutural mais previsível e simplifica diversas análises de engenharia (DANIEL; ISHAI, 2006).

Além da orientação das fibras, o número de camadas e a espessura total do laminado exercem influência direta sobre sua resposta mecânica. O aumento da espessura normalmente resulta em maior rigidez à flexão e maior capacidade de suportar carregamentos compressivos. Consequentemente, essas variáveis possuem papel importante em análises relacionadas à estabilidade estrutural e à flambagem de painéis laminados (LENGVARSKÝ; BOCKO; HAGARA, 2016).

A influência da orientação das fibras sobre o comportamento estrutural é particularmente importante em problemas de flambagem. Como a rigidez do laminado varia em função da sequência de empilhamento, diferentes configurações podem resultar em cargas críticas significativamente distintas. Dessa forma, a definição adequada da orientação das camadas constitui uma etapa fundamental no projeto de estruturas de materiais compósitos submetidas a esforços compressivos.

O estudo dos laminados compósitos exige a compreensão das relações entre tensões, deformações e propriedades elásticas das lâminas individuais.

2.3. Comportamento mecânico dos Laminados

O comportamento mecânico dos laminados compósitos difere significativamente daquele observado em materiais metálicos convencionais. Enquanto materiais isotrópicos apresentam propriedades mecânicas idênticas em todas as direções, os laminados compósitos possuem propriedades que dependem da orientação das fibras e da sequência de empilhamento das camadas. Essa característica faz com que a análise estrutural desses materiais exija procedimentos específicos para a determinação de tensões, deformações e rigidez equivalente da estrutura (DANIEL; ISHAI, 2006).

A resposta mecânica de um laminado é resultado da contribuição conjunta de todas as lâminas que o compõem. Dessa forma, propriedades como módulo de elasticidade, resistência mecânica e rigidez à flexão não dependem apenas dos materiais constituintes, mas também da orientação das fibras e da posição de cada camada ao longo da espessura do laminado (JONES, 1999).

O estudo do comportamento mecânico dos laminados constitui a base para a formulação da Teoria Clássica dos Laminados e para a análise de fenômenos estruturais como a flambagem. Para isso, torna-se necessário compreender conceitos relacionados ao

estado plano de tensão, à transformação de coordenadas e às relações constitutivas que descrevem o comportamento elástico do material.

2.3.1. Materiais Ortotrópicos

Um material ortotrópico apresenta propriedades distintas em três direções mutuamente perpendiculares, geralmente associadas às direções longitudinal, transversal e normal ao plano da lâmina. Em compósitos reforçados com fibras contínuas, a direção paralela às fibras apresenta normalmente os maiores valores de resistência e rigidez, enquanto as demais direções exibem comportamento mecânico inferior (KOLLÁR; SPRINGER, 2003).

O conhecimento das propriedades ortotrópicas é fundamental para a análise estrutural de laminados, pois essas propriedades serão utilizadas posteriormente na determinação das matrizes constitutivas e das rigidezes equivalentes do painel de material compósito.

2.3.2. Estado Plano de Tensão

Em estruturas do tipo placa, a espessura normalmente é muito menor que suas dimensões no plano. Nessa situação, admite-se que as tensões associadas à direção da espessura sejam significativamente menores quando comparadas às tensões atuantes no plano da estrutura. Essa simplificação é conhecida como hipótese de estado plano de tensão (KOLLÁR; SPRINGER, 2003).

Matematicamente, essa condição pode ser representada pela aproximação:

$$\sigma_z = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$$

Em que (σ_z) representa a tensão normal na direção z , (τ_{xz}) e (τ_{yz}) correspondem às tensões de cisalhamento atuantes nos planos (xz) e (yz) , respectivamente.

A adoção dessa hipótese reduz a complexidade das relações constitutivas e permite representar adequadamente o comportamento mecânico de placas laminadas submetidas a carregamentos predominantemente distribuídos no plano. Por esse motivo, o estado plano de tensão é amplamente empregado em análises de laminados compósitos e em modelagens realizadas por meio do Método dos Elementos Finitos.

2.3.3. Relações Tensão - Deformação

A relação entre tensões e deformações em materiais compósitos pode ser descrita por meio da forma generalizada da Lei de Hooke. Para materiais ortotrópicos submetidos a pequenas deformações, admite-se comportamento elástico linear, permitindo representar as relações constitutivas por meio de matrizes de rigidez e flexibilidade (DANIEL; ISHAI, 2006).

As equações constitutivas para uma lâmina de material compósito podem ser expressas como:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_6 \end{Bmatrix}$$

Em que (σ) representa o vetor de tensões, (ε) corresponde ao vetor de deformações e $([Q])$ é a matriz de rigidez reduzida da lâmina.

A matriz $[Q]$ relaciona as tensões e deformações no sistema principal de coordenadas da lâmina e representa o comportamento elástico da lâmina especialmente ortotrópica.

$$[Q] = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix}$$

Os coeficientes da matriz Q são determinados a partir das propriedades mecânicas da lâmina.

$$Q_{11} = \frac{E_1}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}$$

$$Q_{22} = \frac{E_2}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}$$

$$Q_{12} = \frac{\nu_{12}E_2}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}$$

$$Q_{66} = G_{12}$$

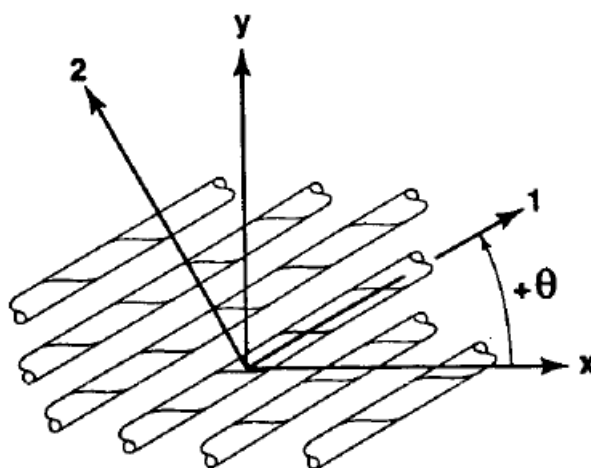
Essa formulação constitui a base para o desenvolvimento da Teoria Clássica dos Laminados, utilizada para determinar as propriedades equivalentes de estruturas multicamadas. A partir das relações tensão-deformação de cada lâmina torna-se possível calcular a resposta global do laminado e avaliar seu comportamento sob diferentes condições de carregamento.

Assim, os conceitos apresentados nesta seção fornecem os fundamentos necessários para a formulação da Teoria Clássica dos Laminados, que será abordada na próxima seção e utilizada como base para a análise da estabilidade estrutural dos painéis compósitos estudados neste trabalho.

2.3.3.1. Transformação de Coordenadas

As propriedades mecânicas de uma lâmina são originalmente definidas em seu sistema de coordenadas local, cujos eixos estão alinhados com a orientação das fibras. Entretanto, para a análise estrutural do laminado, é necessário expressar essas propriedades em um sistema de coordenadas global associado à geometria da estrutura (DANIEL; ISHAI, 2006). A Figura 4 apresenta a rotação positiva do sistema de eixos principal do material.

Figura 4. Rotação positiva do sistema de eixos principal do material



Fonte: Jones, 1999.

A transformação de coordenadas permite relacionar tensões, deformações e propriedades elásticas entre os sistemas local e global. Esse procedimento depende diretamente do ângulo de orientação das fibras em cada camada, sendo indispensável para a determinação correta da rigidez equivalente do laminado (KASSAPOGLOUK, 2010).

A correta transformação das propriedades mecânicas é essencial para a análise de laminados multicamadas, uma vez que cada lâmina pode possuir orientação distinta. Como consequência, a contribuição individual de cada camada para a rigidez global da estrutura depende diretamente da sua posição e orientação no empilhamento.

Posteriormente realiza-se a transformação das propriedades para os diferentes ângulos de orientação das fibras utilizados nos laminados estudados, onde $[T]$ representa a matriz de transformação associada ao ângulo de orientação das fibras.

$$[\bar{Q}] = [T]^{-1}[Q][T]$$

E o sistema de equações pode ser escrito na forma:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_s \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{xx} & Q_{xy} & Q_{xs} \\ Q_{xy} & Q_{yy} & Q_{ys} \\ Q_{xs} & Q_{ys} & Q_{ss} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_s \end{Bmatrix}$$

2.4. Teoria Clássica de Laminação

A Teoria Clássica de Laminação (TCL) é uma das principais formulações utilizadas para descrever o comportamento mecânico de placas compósitas laminadas. Essa teoria permite relacionar as propriedades individuais de cada lâmina com a resposta global do laminado, considerando a contribuição de todas as camadas presentes na sequência de empilhamento. Dessa forma, a TCL constitui uma ferramenta fundamental para a análise de estruturas compósitas submetidas a esforços no plano, flexão e carregamentos combinados (DANIEL; ISHAI, 2006).

A formulação da TCL baseia-se na hipótese de que as lâminas permanecem perfeitamente aderidas entre si, sem escorregamento relativo entre as camadas. Além disso, considera-se que o laminado é suficientemente fino para que as deformações por cisalhamento transversal possam ser desprezadas. Com isso, as deformações no plano variam linearmente ao longo da espessura do laminado, sendo descritas a partir das deformações do plano médio e das curvaturas da estrutura (KOLLÁR; SPRINGER, 2003).

Matematicamente, essa hipótese pode ser representada por:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \varepsilon_x^0 + z\kappa_x \\ \varepsilon_y &= \varepsilon_y^0 + z\kappa_y \end{aligned}$$

$$\gamma_s = \gamma_s^0 + z \cdot \kappa_s$$

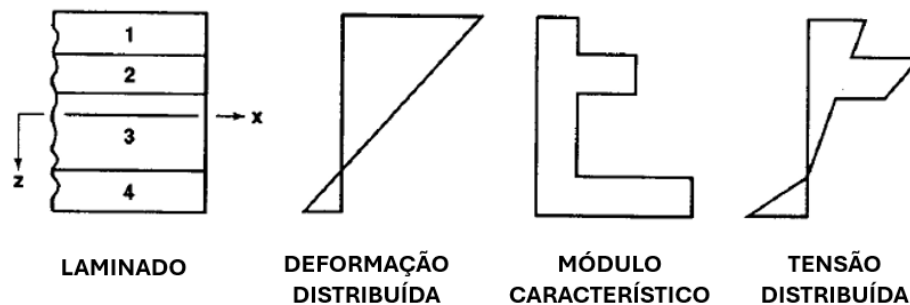
Ou na forma matricial, é possível escrever:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_s \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_s^0 \end{Bmatrix} + z \begin{Bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_s \end{Bmatrix}$$

Em que (κ_x) , (κ_y) e (κ_s) representam as curvaturas associadas à flexão e à torção da placa laminada e o termo (z) representa a distância de um ponto qualquer até o plano médio do laminado, indicando que as deformações variam ao longo da espessura da estrutura.

Que representa a variação linear das deformações em relação a coordenada (z) do laminado:

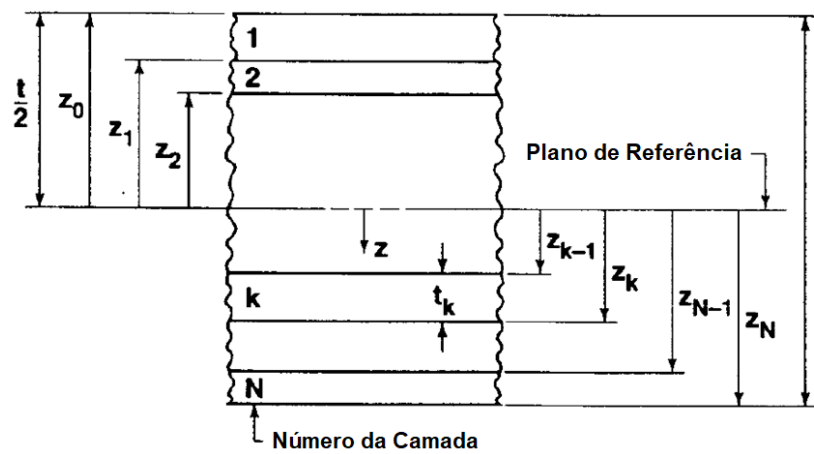
Figura 5. Variação das tensões e deformações do laminado



Fonte: Adaptado de Jones (1999)

As coordenadas (z) de cada camada podem ser definidas de acordo com a Figura 6:

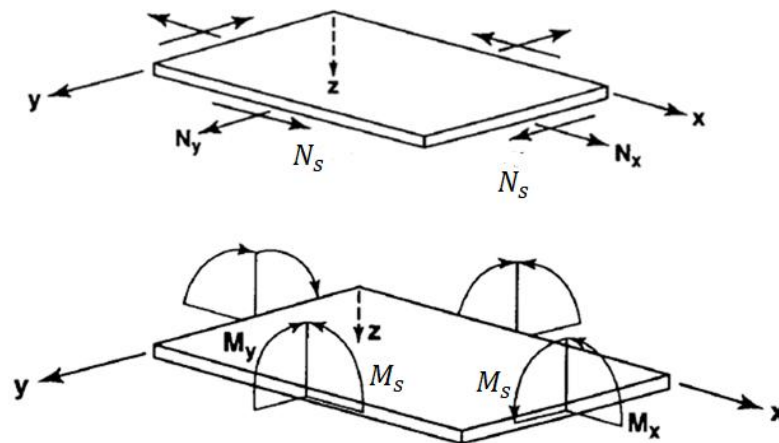
Figura 6. Coordenadas z_k de cada camada



Fonte: Adaptado de Jones (1999).

Na TCL, os esforços internos do laminado são representados por resultantes de força e de momento por unidade de comprimento. As resultantes de força representam os efeitos integrados das tensões no plano, enquanto as resultantes de momento representam os efeitos dessas tensões ponderados pela distância em relação ao plano médio. Essa abordagem é empregada porque, em laminados multicamadas, as tensões podem apresentar descontinuidades entre as lâminas, tornando mais conveniente trabalhar com esforços resultantes (DANIEL; ISHAI, 2006). A Figura 7 apresenta a convenção de sinais dos esforços resultantes:

Figura 7. Forças e momentos resultantes no laminado



Fonte: Jones (1999).

As resultantes de força e momento podem ser representadas por:

$$\mathbf{N} = \begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_s \end{Bmatrix} \quad \mathbf{M} = \begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_s \end{Bmatrix}$$

Em que (N) representa o vetor de esforços resultantes no plano do laminado, enquanto (M) representa o vetor de momentos resultantes por unidade de comprimento, (N_x) e (N_y) correspondem aos esforços normais atuantes nas direções (x) e (y) , respectivamente, (N_s) representa o esforço de cisalhamento no plano do laminado, (M_x) e (M_y) representam os momentos fletores em torno dos eixos (x) e (y) , respectivamente e (M_s) corresponde ao momento associado ao cisalhamento ou torção da placa laminada.

A relação entre os esforços resultantes e as deformações do laminado é expressa por meio das matrizes de rigidez (A) , (B) e (D) . Essas matrizes dependem das propriedades mecânicas de cada lâmina, da orientação das fibras, da espessura das camadas e da sequência de empilhamento. Assim, a rigidez global do laminado não é definida apenas pelo material utilizado, mas também pela organização das camadas ao longo da espessura (DANIEL; ISHAI, 2006).

Na Teoria Clássica da Laminação, as propriedades estruturais dos laminados são obtidas a partir das propriedades mecânicas das lâminas individuais e da orientação das fibras em cada camada. Por meio dessa formulação é possível determinar as matrizes de rigidez responsáveis pela caracterização do comportamento global do laminado.

A integração das contribuições individuais de cada camada ao longo da espessura permitiu determinar as matrizes $[A]$, $[B]$ e $[D]$ para todas as configurações analisadas.

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{N} \\ \mathbf{M} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{B} & \mathbf{D} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}^0 \\ \boldsymbol{\kappa} \end{Bmatrix}$$

Ou na forma matricial completa, pode-se escrever:

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_s \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{xx} & A_{xy} & A_{xs} \\ A_{xy} & A_{yy} & A_{ys} \\ A_{xs} & A_{ys} & A_{ss} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_s^0 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} B_{xx} & B_{xy} & B_{xs} \\ B_{xy} & B_{yy} & B_{ys} \\ B_{xs} & B_{ys} & B_{ss} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_s \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_s \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} B_{xx} & B_{xy} & B_{xs} \\ B_{xy} & B_{yy} & B_{ys} \\ B_{xs} & B_{ys} & B_{ss} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_s^0 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} D_{xx} & D_{xy} & D_{xs} \\ D_{xy} & D_{yy} & D_{ys} \\ D_{xs} & D_{ys} & D_{ss} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_s \end{Bmatrix}$$

A matriz (A) representa a rigidez extensional do laminado, relacionando os esforços no plano às deformações do plano médio. A matriz (B) representa a rigidez de acoplamento entre esforços de membrana e flexão, indicando que carregamentos no plano podem produzir curvaturas e que momentos podem produzir deformações no plano. Já a matriz [D] representa a rigidez à flexão do laminado, relacionando momentos às curvaturas da estrutura (DANIEL; ISHAI, 2006).

Em laminados simétricos, a matriz de acoplamento (B) é nula, pois para cada lâmina situada a uma determinada distância do plano médio existe uma lâmina correspondente, com mesma espessura, orientação e propriedades, posicionada de forma simétrica no lado oposto. Nessa condição, não há acoplamento entre carregamentos no plano e deformações por flexão, simplificando a análise estrutural do laminado (DANIEL; ISHAI, 2006).

No contexto deste trabalho, a Teoria Clássica dos Laminados é importante porque fornece a base conceitual para compreender como a orientação das fibras e o empilhamento das camadas influenciam a rigidez global de um painel compósito. Como a flambagem está diretamente relacionada à rigidez estrutural, a definição das camadas e de suas orientações torna-se um fator determinante na avaliação da carga crítica do painel laminado.

Dessa forma, a TCL estabelece a ligação entre a constituição do laminado e sua resposta estrutural. A partir dela, é possível compreender por que painéis com o mesmo material, mas com diferentes orientações de fibras ou diferentes números de camadas, podem apresentar comportamentos distintos quando submetidos a carregamentos compressivos. Essa relação será aprofundada na seção seguinte, dedicada ao fenômeno da flambagem estrutural.

2.5. Flambagem de Estruturas

A flambagem é um fenômeno de instabilidade estrutural que ocorre quando uma estrutura submetida a esforços compressivos atinge uma condição crítica de equilíbrio, passando a apresentar deslocamentos laterais significativos mesmo sem aumento proporcional do carregamento aplicado. Diferentemente dos mecanismos de falha associados à resistência do material, a flambagem está relacionada à perda de estabilidade da estrutura, podendo ocorrer antes que as tensões atinjam os limites de escoamento ou ruptura do material (LEISSA, 1995).

Em elementos estruturais esbeltos, como colunas, chapas e painéis, a flambagem representa um dos principais critérios de projeto, uma vez que a capacidade resistente da estrutura pode ser limitada pela instabilidade estrutural antes da ocorrência de falhas materiais. Em aplicações aeronáuticas, esse fenômeno assume grande importância devido à busca constante pela redução de peso estrutural, resultando na utilização de componentes com pequenas espessuras e elevada relação entre dimensões longitudinais e espessura (BRUHN).

Figura 8. Exemplo de flambagem em fuselagem

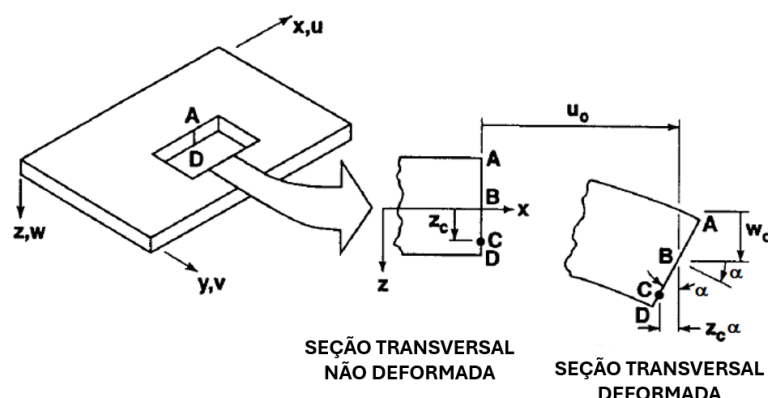


Fonte: U. S. Air Force (2017).

A Figura 8 apresenta um exemplo de flambagem local do revestimento de uma fuselagem aeronáutica. Observa-se a formação de ondulações na chapa submetida a esforços compressivos, caracterizando a perda de estabilidade estrutural do painel entre os elementos de reforço. Esse fenômeno é análogo ao comportamento observado em placas e painéis compósitos analisados por métodos numéricos de elementos finitos.

A ocorrência da flambagem depende de diversos fatores, incluindo propriedades mecânicas do material, geometria da estrutura, condições de contorno e forma de aplicação dos carregamentos. Em estruturas laminadas, a orientação das fibras e a sequência de empilhamento também exercem influência significativa sobre a carga crítica associada ao início da instabilidade (LENGVARSKÝ; BOCKO; HAGARA, 2016).

Figura 9. Seção laminada antes (ABD) e depois (A'B'D') da deformação



Fonte: Jones (1999).

A Figura 9 apresenta a deformação da seção transversal de uma placa laminada submetida à torção, comparando sua configuração inicial e deformada. Observa-se que, sob a ação do carregamento, ocorre deslocamento transversal w_0 e rotação angular α , resultando em empenamento da seção e alteração da geometria original. Esse comportamento evidencia a influência da rigidez à torção e da distribuição de tensões no desempenho estrutural do laminado.

2.5.1. Conceitos Fundamentais de Flambagem

A análise de flambagem busca determinar o carregamento crítico capaz de provocar a perda de estabilidade da estrutura. Esse carregamento, denominado carga crítica de flambagem, representa o limite entre o comportamento estável e instável do sistema estrutural. A partir desse ponto, pequenas imperfeições geométricas ou perturbações podem produzir deformações significativas, alterando a configuração de equilíbrio da estrutura (LEISSA, 1995).

Em análises lineares de flambagem, considera-se que a estrutura apresenta comportamento elástico linear até a ocorrência da instabilidade. Nessa abordagem, a carga crítica é obtida por meio de um problema de Carga Crítica de Flambagem, cuja solução fornece os fatores de carga associados aos diferentes modos de flambagem. Cada modo corresponde a uma possível configuração deformada da estrutura após a perda de estabilidade (LEISSA, 1995).

A formulação geral da análise linear de flambagem pode ser expressa por:

$$([K] + \lambda[K_G])\{u\} = 0$$

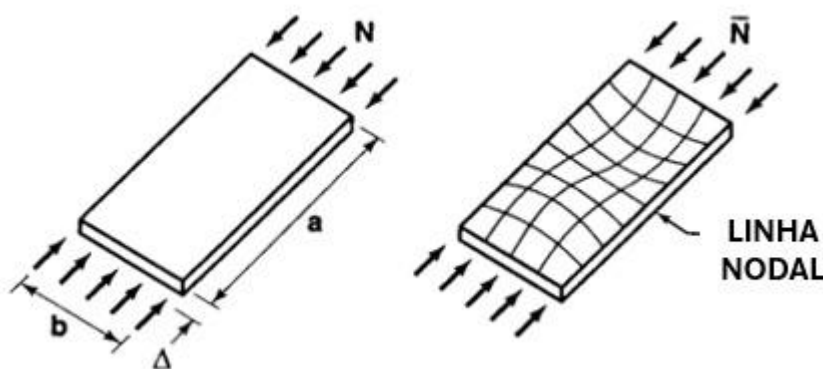
A condição crítica de instabilidade é obtida quando o determinante do sistema assume valor nulo.

$$\det[K + \lambda K_G] = 0$$

Em que (K) representa a matriz de rigidez estrutural, (K_G) matriz de rigidez geométrica, (λ) corresponde ao fator de carga crítica e (u) representa o valo de deslocamentos.

A solução desse sistema fornece os Carga Crítica de Flambagem associados às cargas críticas de flambagem e os autovetores associados aos respectivos modos de instabilidade. Em problemas estruturais, normalmente o primeiro Carga Crítica de Flambagem é o mais importante, pois corresponde ao menor carregamento capaz de provocar a perda de estabilidade da estrutura.

Figura 10. Flambagem de uma placa simplesmente apoiada



Fonte: Jones (1999).

Em estruturas aeronáuticas, a determinação da carga crítica de flambagem constitui uma etapa fundamental do projeto estrutural. Como muitos componentes trabalham sob carregamentos compressivos durante o voo, a garantia de estabilidade estrutural torna-se indispensável para assegurar o desempenho e a segurança operacional da aeronave.

2.5.2. Flambagem de Placas Compósitas

A análise de flambagem de placas compósitas apresenta maior complexidade quando comparada àquela realizada em estruturas isotrópicas convencionais. Enquanto em materiais metálicos a rigidez estrutural é uniforme em todas as direções, nos laminados compósitos a rigidez depende da orientação das fibras, da sequência de empilhamento e das propriedades mecânicas de cada lâmina. Como consequência, a resposta à flambagem passa a ser fortemente influenciada pela configuração do laminado (LEISSA, 1983).

O comportamento à flambagem de placas laminadas resulta da interação entre as propriedades mecânicas das lâminas individuais e a rigidez global do laminado. Nesse contexto, a Teoria Clássica dos Laminados fornece os parâmetros necessários para determinar as rigidezes equivalentes da estrutura, permitindo avaliar sua estabilidade quando submetida a carregamentos compressivos. A matriz de rigidez à flexão, representada por $[D]$, possui papel particularmente importante, uma vez que está diretamente relacionada à resistência do laminado à deformação fora do plano (DANIEL; ISHAI, 2006).

Além das propriedades do material, a carga crítica de flambagem é influenciada por fatores geométricos, como comprimento, largura e espessura da placa, bem como pelas condições de contorno adotadas. Estruturas com bordas engastadas tendem a apresentar maiores cargas críticas quando comparadas a placas simplesmente apoiadas, devido à maior restrição aos deslocamentos e rotações nas extremidades (LEISSA, 1983).

Em placas finas de material compósito, a ocorrência da flambagem não depende exclusivamente da magnitude do carregamento aplicado, mas também da distribuição da rigidez ao longo da estrutura. Como essa distribuição está diretamente associada à orientação das fibras, diferentes sequências de empilhamento podem resultar em comportamentos significativamente distintos, mesmo quando a geometria e o material permanecem inalterados (KASSAPOGLOU, 2010).

A análise da estabilidade estrutural de laminados compósitos possui grande relevância em aplicações aeronáuticas. Painéis estruturais presentes em fuselagens, revestimentos de asas e superfícies de controle frequentemente operam sob esforços compressivos durante o voo. Nessas condições, a determinação da carga crítica de flambagem torna-se essencial para garantir a integridade estrutural e a segurança operacional da aeronave (TURVEY; MARSHALL, 1995).

Os avanços na utilização de materiais compósitos possibilitaram a obtenção de estruturas mais leves e eficientes. Entretanto, essa redução de peso frequentemente resulta

em componentes mais delgados, tornando a flambagem um dos principais modos de falha considerados durante o dimensionamento estrutural. Por esse motivo, diversos estudos têm sido realizados com o objetivo de compreender como parâmetros como orientação das fibras, número de camadas e sequência de empilhamento afetam a estabilidade estrutural dos laminados.

Entre esses estudos, destaca-se o trabalho desenvolvido por Lengvarský, Bocko e Hagara (2016), que investigou a influência da orientação das fibras na carga crítica de flambagem de placas compósitas laminadas. Os resultados obtidos demonstraram que alterações na configuração do empilhamento podem produzir variações significativas na resistência à flambagem, evidenciando a importância da definição adequada da arquitetura do laminado durante o projeto estrutural.

Dessa forma, o estudo da influência da orientação das fibras sobre o comportamento à flambagem torna-se um aspecto fundamental na análise de painéis compósitos laminados, sendo abordado com maior detalhe na próxima seção.

2.5.3. Influência da Orientação das Fibras na Flambagem

A orientação das fibras constitui um dos parâmetros mais importantes no projeto de estruturas compósitas laminadas. Diferentemente dos materiais isotrópicos, nos quais as propriedades mecânicas permanecem constantes independentemente da direção considerada, os laminados compósitos apresentam comportamento mecânico fortemente dependente da disposição angular das fibras. Como consequência, alterações na orientação das camadas podem produzir mudanças significativas na rigidez estrutural e, consequentemente, na resistência à flambagem da estrutura (JONES, 1999).

A rigidez equivalente do laminado depende não apenas da orientação individual das camadas, mas também da sequência de empilhamento adotada. Dessa forma, laminados constituídos pelos mesmos materiais podem apresentar cargas críticas de flambagem distintas quando as fibras são reorganizadas em diferentes configurações. Esse comportamento evidencia a importância da arquitetura do laminado na definição do desempenho estrutural da placa (KASSAPOGLOU, 2010).

No estudo desenvolvido por Lengvarský, Bocko e Hagara (2016), foram avaliadas diferentes configurações de empilhamento com o objetivo de investigar a influência da orientação das fibras sobre a carga crítica de flambagem de placas compósitas laminadas. Os resultados demonstraram que alterações relativamente simples na sequência de

empilhamento foram capazes de modificar significativamente os valores obtidos para a carga crítica, evidenciando a forte relação entre orientação das fibras e estabilidade estrutural.

Além da orientação das fibras, o número de camadas também influencia o comportamento à flambagem. O aumento da espessura do laminado normalmente resulta em maior rigidez à flexão e, conseqüentemente, em maiores cargas críticas. Entretanto, a eficiência estrutural obtida não depende exclusivamente da quantidade de material empregada, mas também da forma como esse material é distribuído ao longo da espessura do laminado (DANIEL; ISHAI, 2006).

Do ponto de vista do projeto estrutural, a possibilidade de modificar o comportamento mecânico da estrutura por meio da orientação das fibras representa uma das principais vantagens dos materiais compósitos. Enquanto em materiais metálicos a melhoria da resistência à flambagem normalmente exige aumento de espessura ou inclusão de reforços estruturais, nos laminados compósitos é possível otimizar a resposta estrutural por meio da alteração da sequência de empilhamento, sem necessariamente aumentar a massa da estrutura (JONES, 1999).

No contexto deste trabalho, a influência da orientação das fibras assume papel central, uma vez que as análises numéricas realizadas têm como objetivo avaliar o comportamento à flambagem de um painel compósito laminado submetido a carregamentos compressivos. Dessa forma, a investigação da relação entre empilhamento, rigidez estrutural e carga crítica constitui um dos principais fundamentos teóricos que sustentam a metodologia adotada nesta pesquisa.

A avaliação desse comportamento é realizada por meio de técnicas numéricas baseadas no Método dos Elementos Finitos, amplamente empregado na análise estrutural de placas compósitas devido à sua capacidade de representar geometrias complexas, diferentes condições de contorno e variadas configurações de empilhamento. Esse método será apresentado na seção seguinte.

2.6. Método dos Elementos Finitos

O Método dos Elementos Finitos (MEF) é uma técnica numérica amplamente empregada na análise estrutural de componentes mecânicos e aeronáuticos. Seu princípio fundamental consiste na discretização de um domínio contínuo em um conjunto finito de elementos interconectados por nós, permitindo que problemas complexos sejam resolvidos por meio de aproximações matemáticas (TURVEY; MARSHALL, 1995).

A aplicação do MEF possibilita a avaliação de deslocamentos, deformações, tensões e fenômenos de instabilidade estrutural em componentes com diferentes geometrias e condições de carregamento. Devido à sua versatilidade e precisão, o método tornou-se uma das principais ferramentas utilizadas no projeto e análise de estruturas compósitas laminadas (DANIEL; ISHAI, 2006).

No caso de laminados compósitos, o Método dos Elementos Finitos apresenta especial relevância por permitir a representação individual das propriedades mecânicas associadas a cada camada do laminado. Dessa forma, é possível considerar diferentes orientações de fibras, sequências de empilhamento e espessuras, possibilitando uma avaliação mais realista do comportamento estrutural da placa (KASSAPOGLOU, 2010).

No MEF, o comportamento global da estrutura é obtido a partir da montagem das matrizes de rigidez dos elementos individuais. Cada elemento possui uma formulação matemática específica capaz de representar o comportamento estrutural da região discretizada. A combinação das contribuições de todos os elementos permite construir o sistema global de equações responsável por descrever a resposta da estrutura submetida aos carregamentos aplicados (TURVEY; MARSHALL, 1995).

A precisão dos resultados obtidos depende de diversos fatores, entre os quais destacam-se o tipo de elemento utilizado, o refinamento da malha, as propriedades mecânicas atribuídas ao material e a correta definição das condições de contorno. Em análises de flambagem, esses aspectos assumem importância ainda maior, uma vez que pequenas alterações na rigidez estrutural podem influenciar significativamente os valores da carga crítica obtida.

No contexto da análise de estabilidade estrutural, a determinação da carga crítica de flambagem é normalmente realizada por meio de uma análise de Carga Crítica de Flambagem. Nesse procedimento, o problema estrutural é formulado de maneira a identificar os carregamentos associados aos diferentes modos de instabilidade da estrutura.

No contexto da análise de flambagem, o Método dos Elementos Finitos permite resolver o problema de Carga Crítica de Flambagem associado à instabilidade estrutural da placa. Por meio dessa abordagem, são determinados os fatores de carga crítica e os respectivos modos de flambagem da estrutura, possibilitando a avaliação da estabilidade do painel laminado sob diferentes condições de carregamento.

A solução dessa equação fornece os Carga Crítica de Flambagem associados às cargas críticas de flambagem e os autovetores correspondentes aos modos de instabilidade

da estrutura. Em geral, o menor Carga Crítica de Flambagem representa a primeira carga crítica de flambagem e corresponde à condição de instabilidade mais provável de ocorrer no componente analisado.

Uma das principais vantagens do Método dos Elementos Finitos é a capacidade de representar geometrias complexas e diferentes condições de contorno com elevado nível de detalhamento. Essa característica torna o método especialmente adequado para a análise de painéis compósitos utilizados em estruturas aeronáuticas, nos quais a distribuição de rigidez depende diretamente da orientação das fibras e da sequência de empilhamento das camadas.

Além disso, o método permite avaliar a influência de parâmetros geométricos e mecânicos sobre o comportamento estrutural da placa, contribuindo para o desenvolvimento de configurações mais eficientes e seguras. Dessa forma, o MEF constitui uma ferramenta fundamental para o estudo da flambagem de painéis compósitos laminados.

O Método dos Elementos Finitos constitui uma ferramenta fundamental para a análise da flambagem de placas compósitas laminadas, permitindo a determinação das cargas críticas e dos modos de instabilidade associados ao comportamento estrutural da placa. Em razão de sua capacidade de representar diferentes geometrias, materiais e condições de contorno, o método é amplamente empregado em estudos numéricos voltados à avaliação da estabilidade estrutural de laminados compósitos.

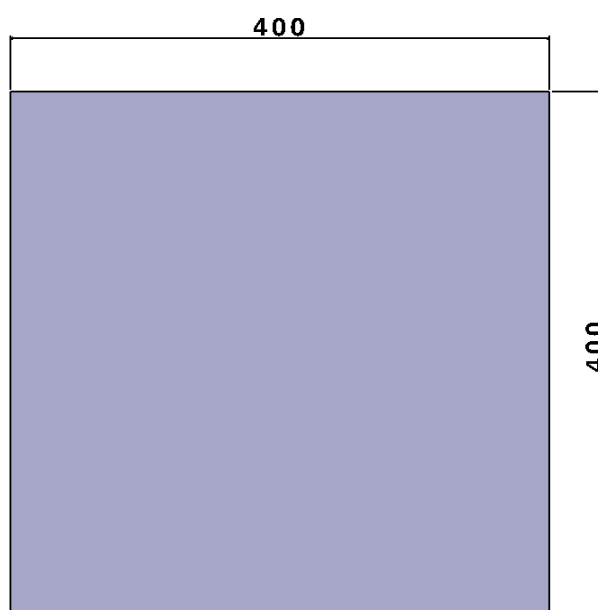
3. DESENVOLVIMENTO DO TRABALHO

3.1. Modelo Analisado

O desenvolvimento deste trabalho consistiu na análise da flambagem de painéis compósitos laminados submetidos à compressão uniaxial, com o objetivo de avaliar a influência da orientação das fibras e da espessura total do laminado sobre a carga crítica de flambagem. Para a definição da geometria do painel, das propriedades mecânicas da lâmina unidirecional e das configurações de empilhamento analisadas, adotou-se como referência o modelo apresentado por Lengvarský, Bocko e Hagara (2016), mantendo-se as principais características geométricas do problema de forma a permitir a comparação entre diferentes laminados sob as mesmas condições de carregamento.

O modelo estudado consiste em uma placa compósita laminada de geometria quadrada, com comprimento $a = 400$ mm e largura $b = 400$ mm, submetida a compressão no plano da estrutura. A adoção de uma placa quadrada permitiu fixar a razão geométrica $a/b = 1$, simplificando a análise da influência exclusiva da arquitetura do laminado sobre a resposta estrutural. A geometria utilizada ao longo de todo o trabalho é ilustrada na Figura 11, na qual se apresenta o painel adotado como domínio de análise para o cálculo analítico e para a modelagem numérica no Método dos Elementos Finitos.

Figura 11. Painel Analisado.



Fonte: Autores (2026)

As dimensões geométricas adotadas para o painel estão reunidas na Tabela 1. Nela são apresentadas o comprimento, a largura, a razão geométrica entre os lados da placa e a espessura individual da lâmina, parâmetro utilizado posteriormente na definição da espessura total dos laminados analisados.

Tabela 1. Dimensões de cada lâmina de material compósito do painel analisado.

Parâmetro	Valor
Comprimento	400 mm
Largura	400 mm
Razão a/b	1
Espessura da lâmina	0,5 mm

Fonte: Autores (2026).

A placa foi modelada considerando comportamento de laminado ortotrópico multicamada, com variação da sequência de empilhamento e do número de camadas ao longo das análises. Assim, embora a geometria em planta tenha sido mantida constante em todos os casos, a espessura total do painel foi alterada conforme a quantidade de camadas de cada configuração. Dessa forma, tornou-se possível avaliar separadamente a influência da espessura e da orientação das fibras sobre a rigidez à flexão do laminado e, conseqüentemente, sobre a flambagem da estrutura.

As propriedades mecânicas da lâmina unidirecional utilizadas na construção dos laminados foram extraídas do artigo de referência e são apresentadas na Tabela 2. Esses parâmetros constituem a base para a determinação das matrizes constitutivas da lâmina, para a transformação das propriedades em função do ângulo de orientação das fibras e para a obtenção das matrizes de rigidez do laminado por meio da Teoria Clássica da Laminação.

Tabela 2. Propriedades mecânicas da lâmina unidirecional

Propriedade	Valor
E1	50.000 MPa
E2	15.000 MPa
G12	5.000 MPa
ν_{12}	0,30
Espessura da lâmina	0,5 mm

Fonte: Autores (2026).

A partir dessas propriedades e das diferentes orientações adotadas em cada camada, foi possível calcular os coeficientes de rigidez equivalentes de cada laminado e, em seguida, estimar sua resposta à flambagem por meio de duas abordagens complementares: uma abordagem analítica, baseada na teoria clássica de flambagem de placas, e uma abordagem numérica, conduzida pelo Método dos Elementos Finitos. A primeira dessas etapas é descrita na seção seguinte.

3.2. Determinação da Tensão Crítica de Flambagem

Determinação da tensão crítica de flambagem foi realizada com o objetivo de estimar analiticamente a carga de instabilidade das placas laminadas e fornecer uma referência para comparação com os resultados obtidos por meio do Método dos Elementos Finitos. Para isso, foi utilizada a Teoria de Instabilidade de Placas finas, conforme Bruhn, 1973.

Inicialmente, as propriedades mecânicas da lâmina unidirecional, a espessura individual das camadas e as diferentes sequências de empilhamento foram consideradas no estudo. A partir desses dados, foram calculadas as matrizes de rigidez $[A]$, $[B]$ e $[D]$ por meio da Teoria Clássica da Laminação, permitindo determinar as propriedades equivalentes de cada laminado.

A tensão crítica de flambagem foi calculada utilizando a expressão apresentada na Equação σ_{cr} de que relaciona o coeficiente de flambagem da placa, o módulo de elasticidade equivalente e os parâmetros geométricos do painel (Bruhn, 1973).

$$\sigma_{cr} = \frac{\pi^2 k_c E}{12(1 - \nu_e^2)} \left(\frac{t}{b} \right)^2$$

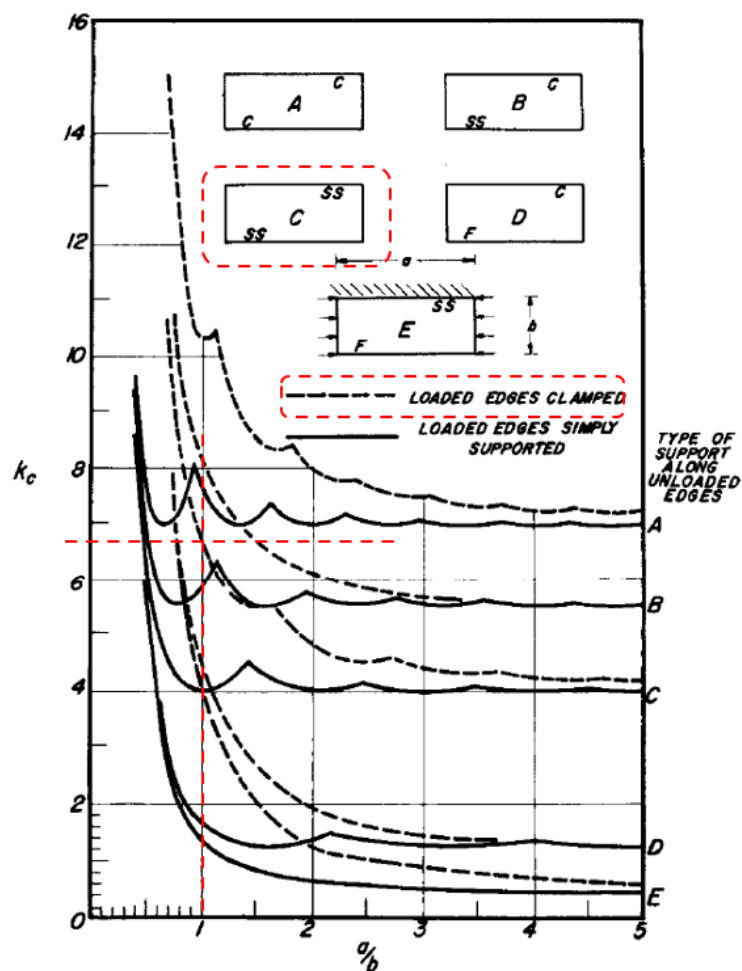
O módulo de elasticidade equivalente na direção de aplicação da carga foi obtido a partir dos coeficientes da matriz $[A]$:

$$\overline{E}_x = \frac{1}{h} \left[A_{xx} - \frac{A_{xy}^2}{A_{yy}} \right]$$

O coeficiente de flambagem (k_c) foi determinado com base nas curvas propostas por Bruhn (1973), considerando a razão geométrica entre os lados da placa e as condições de

contorno adotadas na modelagem. Como as mesmas condições de apoio foram utilizadas tanto nos cálculos analíticos quanto nas simulações numéricas, foi possível estabelecer uma comparação direta entre os resultados obtidos pelos dois métodos.

Figura 12. Curvas do coeficiente de flambagem k_c para placas retangulares comprimidas, em função da razão geométrica a/b das condições de contorno (Bruhn, 1973).



Fonte: Bruhn (1973).

Após a determinação da tensão crítica de flambagem, foi calculada a carga crítica de flambagem (N_x) em unidades de força por unidade de comprimento, utilizada posteriormente na comparação com os Carga Crítica de Flambagem obtidos nas análises de flambagem realizadas no FEMAP.

Como exemplo da implementação desenvolvida, apresenta as matrizes $[A]$, $[B]$ e $[C]$ obtidas para o laminado $[0/90/0]$ com três camadas. Observa-se que a matriz B apresenta valores nulos, resultado esperado para um laminado simétrico, indicando ausência de acoplamento entre os comportamentos membranas e de flexão.

$$[A] = \begin{bmatrix} 59100 & 6937 & 0 \\ 6937 & 41110 & 0 \\ 0 & 0 & 7500 \end{bmatrix} N/mm$$

$$[B] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} N \quad [D] = \begin{bmatrix} 14078 & 1301 & 0 \\ 1301 & 4711 & 0 \\ 0 & 0 & 1406 \end{bmatrix} N.mm$$

A determinação da carga crítica de flambagem de várias configurações de quantidade de camadas e diferentes ângulos de laminação permitiu avaliar a influência da orientação das fibras e da espessura total do laminado sobre os coeficientes de rigidez e sobre os valores de tensão crítica obtidos para cada configuração analisada.

3.3. Modelagem Numérica

A modelagem numérica foi desenvolvida utilizando o software Siemens FEMAP associado ao processador NX Nastran. Para cada configuração analisada foi criada uma propriedade laminada contendo a sequência de empilhamento correspondente, respeitando a orientação individual das fibras em cada camada.

Figura 13. Modelo desenvolvido no FEMAP



Fonte: Autores (2026).

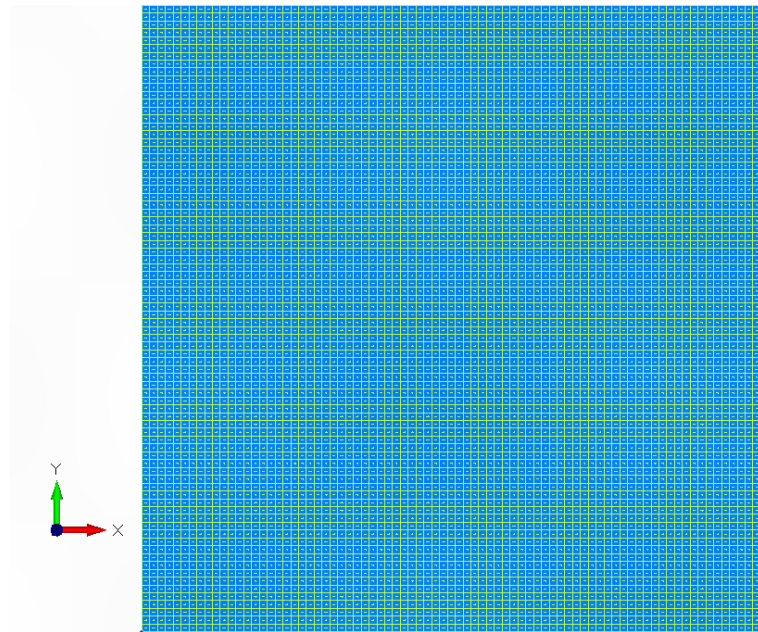
As propriedades do material, as características geométricas da placa e os parâmetros necessários à análise foram inseridos individualmente para cada configuração estudada.

A utilização do método dos elementos finitos permitiu representar adequadamente o comportamento estrutural dos laminados, considerando simultaneamente os efeitos associados à anisotropia do material e à distribuição das camadas ao longo da espessura.

3.4. Malha de elementos finitos

Após a definição do modelo geométrico foi realizada a discretização da estrutura utilizando elementos bidimensionais do tipo *shell*. Todas as análises foram conduzidas utilizando elementos com dimensão característica de 5 mm.

Figura 14. Modelo utilizado com as malhas definidas



Fonte: Autores (2026).

A adoção de uma malha uniforme para todos os modelos permitiu manter as condições numéricas ao longo das análises e garantir a comparabilidade dos resultados obtidos.

Tabela 3. Parâmetros da malha utilizada

Parâmetro	Valor
Tipo de elemento	Shell
Tamanho do elemento	5 mm

Fonte: Autores (2026).

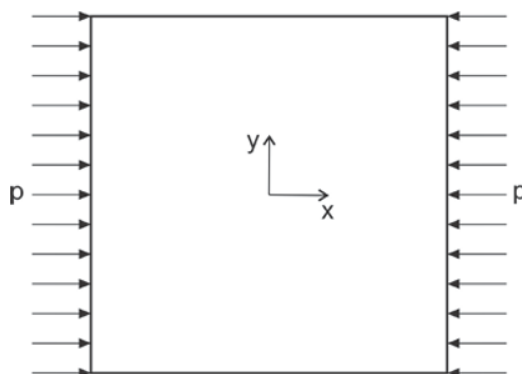
3.5. Condições de Contorno e Carregamentos

O modelo analisado consiste em uma placa quadrada laminada submetida à compressão uniaxial no plano da estrutura. As condições de contorno consideradas na placa consistiram em quatro bordas simplesmente apoiadas. Adicionalmente, foi aplicada uma restrição à rotação em torno do eixo y nas bordas carregadas, com o objetivo de simular uma condição de engastamento.

O carregamento foi aplicado na forma de compressão uniforme distribuída ao longo das bordas paralelas ao eixo X, reproduzindo o estado de tensões utilizado por *Khdeir e Reddy* (1999) e posteriormente empregado por *Ezeh, Ibearugbulem e Onyechere* (2023) no estudo de flambagem de placas laminadas com diferentes orientações de fibras. A carga aplicada atua exclusivamente no plano da placa, gerando um estado de compressão responsável pelo surgimento da instabilidade estrutural.

A determinação da carga crítica foi realizada por meio de uma análise linear de flambagem (*Linear Buckling Analysis*), baseada na solução de um problema de Carga Crítica de Flambagem. Nesse procedimento, o processador calcula um fator de carga crítico associado ao primeiro modo de flambagem da estrutura. O menor Carga Crítica de Flambagem obtido representa a condição de instabilidade inicial da placa e foi utilizado como parâmetro de comparação entre as diferentes configurações de laminado avaliadas.

Figura 15. Esquema do carregamento.



Fonte: The Buckling Analysis of the Composite Plates with Different Orientations of Layers

No contexto da análise de flambagem linear, a carga aplicada no modelo não corresponde diretamente à carga crítica final da estrutura, mas sim a uma carga de referência utilizada pelo solucionador para a formulação do problema de autovalores. A partir dessa carga de referência, o processador calcula fatores multiplicativos associados aos modos de flambagem da placa. O menor autovalor obtido representa a primeira condição de instabilidade da estrutura e foi utilizado neste trabalho como parâmetro principal de comparação entre os diferentes laminados estudados.

Com o objetivo de sistematizar a definição do carregamento, a Tabela 4 apresenta a condição de carregamento adotada nas análises. Como apenas um caso de carregamento foi

considerado, correspondente à compressão uniaxial na direção X , foi possível concentrar a avaliação na influência das propriedades do laminado sobre a resposta à flambagem, sem introduzir variações adicionais associadas a diferentes estados de solicitação.

Tabela 4. Condição de carregamento

Caso	Tipo de carregamento	Direção
LC-01	Compressão uniaxial	X

Fonte: Autores (2026).

As condições de contorno e carregamento descritas nesta seção foram mantidas constantes para todas as configurações analisadas, permitindo que as diferenças observadas nas Carga Crítica de Flambagem fossem atribuídas exclusivamente às alterações na sequência de empilhamento e na espessura dos laminados.

3.6. Configurações Analisadas

As configurações analisadas foram definidas com o objetivo de investigar, de forma sistemática, a influência da orientação das fibras e do aumento da espessura do laminado sobre a flambagem da placa. Para isso, foram selecionadas sequências de empilhamento representativas, compostas por combinações entre camadas orientadas a 0° , 45° e 90° , mantendo-se o caráter simétrico dos laminados avaliados. A escolha dessas orientações se justifica por sua relevância em estruturas compósitas aeronáuticas, nas quais a combinação de camadas longitudinais, transversais e inclinadas exerce influência direta sobre a rigidez global do painel e, consequentemente, sobre sua estabilidade estrutural.

Cada sequência de empilhamento foi analisada com diferentes números de camadas, permitindo variar a espessura total do laminado sem alterar a geometria em planta da placa. Dessa forma, tornou-se possível avaliar simultaneamente dois efeitos de interesse: o efeito da orientação das fibras, associado à redistribuição das rigidezes no laminado, e o efeito do aumento da espessura, relacionado ao crescimento da rigidez à flexão e da resistência à flambagem.

As configurações consideradas no presente trabalho estão reunidas na Tabela 5, na qual são apresentados o laminado, o número de camadas e a espessura total correspondente. A organização desses casos permite uma análise comparativa direta entre laminados de

mesma família de empilhamento, porém com diferentes espessuras, e também entre laminados de espessura semelhante, porém com distintas orientações das fibras.

Tabela 5. Configurações analisadas

Configuração	Nº de camadas	Espessura total
[0/45/0]	3	1,5 mm
[45/0/45]	3	1,5 mm
[0/90/0]	3	1,5 mm
[0/45/0]s	6	3,0 mm
[45/0/45]s	6	3,0 mm
[0/90/0]s	6	3,0 mm
[0/45/0]s	12	6,0 mm
[45/0/45]s	12	6,0 mm
[0/90/0]s	12	6,0 mm

Fonte: Autores (2026).

A adoção dessas configurações permitiu comparar laminados com forte predominância de fibras orientadas na direção do carregamento, como no caso dos empilhamentos contendo camadas a 0°, com laminados contendo maior participação de camadas transversais ou inclinadas, como os arranjos com 90° e 45°. Como a flambagem está diretamente associada à rigidez da placa e à forma como essa rigidez se distribui no laminado, essa comparação mostrou-se particularmente relevante para a interpretação dos resultados apresentados no capítulo seguinte.

3.7. Procedimento de Análise

O procedimento de análise adotado neste trabalho foi estruturado em etapas sucessivas, de forma a garantir coerência entre o cálculo analítico e a modelagem numérica dos laminados estudados. Inicialmente, foram definidas a geometria da placa, as propriedades mecânicas da lâmina unidirecional e as sequências de empilhamento de interesse. A partir desses dados, foi realizada a determinação das propriedades equivalentes de cada laminado por meio da Teoria Clássica da Laminação, com a obtenção das matrizes A , B e D , utilizadas na caracterização da rigidez extensional, do acoplamento e da rigidez à flexão da placa.

Na etapa seguinte, foi elaborada uma planilha de cálculo destinada à obtenção do módulo equivalente do laminado, à definição do coeficiente de flambagem e ao cálculo da tensão crítica de flambagem para cada configuração analisada. Essa etapa forneceu uma estimativa analítica da resposta do painel, permitindo avaliar a influência da sequência de empilhamento sobre os coeficientes de rigidez e sobre a carga crítica prevista pela teoria clássica de flambagem de placas.

Em paralelo, foi desenvolvido o modelo numérico no FEMAP/NX Nastran, utilizando a mesma geometria, as mesmas propriedades de material e as mesmas condições de contorno adotadas na formulação analítica. Para cada laminado, foi criada uma propriedade específica contendo o empilhamento correspondente, seguida da discretização da placa por elementos de casca e da aplicação do carregamento compressivo no plano da estrutura. Com o modelo devidamente configurado, foi executada uma análise linear de flambagem, baseada na solução de um problema de autovalores, permitindo determinar os fatores críticos de carga e os modos de flambagem associados a cada caso.

De forma resumida, o procedimento adotado pode ser descrito nas seguintes etapas: definição da geometria e das propriedades da lâmina; cálculo das matrizes constitutivas do laminado; obtenção analítica da tensão crítica de flambagem; construção do modelo numérico no FEMAP; discretização da placa por elementos shell; aplicação das condições de contorno e do carregamento compressivo; execução da análise de flambagem linear; e, por fim, comparação entre os resultados das diferentes configurações estudadas. Essa sequência metodológica permitiu estabelecer uma relação direta entre a arquitetura do laminado, os coeficientes de rigidez obtidos pela Teoria Clássica da Laminação e os autovalores críticos calculados numericamente.

Com a conclusão dessas etapas, tornou-se possível comparar o comportamento de flambagem dos diferentes painéis laminados sob uma mesma condição de carregamento, identificando o efeito da orientação das fibras e da espessura total sobre a estabilidade estrutural da placa. Os resultados obtidos a partir desse procedimento são apresentados e discutidos no capítulo seguinte.

4. RESULTADOS E DISCUSSÕES

Neste capítulo são apresentados os resultados obtidos a partir das análises de flambagem realizadas para os laminados compósitos selecionados. Inicialmente são discutidos os resultados referentes às configurações [0/45/0], [45/0/45], [0/90/0] e [90/0/90], considerando laminados com três, seis e doze camadas. Para cada caso são apresentados os Carga Crítica de Flambagem críticos obtidos por meio das análises numéricas, os coeficientes mais relevantes da matriz de rigidez à flexão (D) e os respectivos modos deformados associados ao primeiro modo de flambagem.

A discussão dos resultados é conduzida com base na influência da orientação das fibras e da espessura do laminado sobre a rigidez estrutural e a estabilidade da placa. Dessa forma, busca-se estabelecer uma relação entre os coeficientes da matriz D obtidos por meio da Teoria Clássica da Laminação e os Carga Crítica de Flambagem críticos calculados pelo Método dos Elementos Finitos.

Por fim, é realizada uma comparação geral entre todas as configurações analisadas, permitindo identificar as sequências de empilhamento que apresentaram melhor desempenho frente ao carregamento compressivo considerado neste estudo.

4.1. Determinação da Tensão Crítica de Flambagem

Com o objetivo de complementar os resultados obtidos por meio das análises numéricas realizadas no software NX Nastran, foi efetuada a determinação analítica da tensão crítica de flambagem para as diferentes configurações de laminados estudadas. O procedimento foi implementado em planilha eletrônica desenvolvida especificamente para este trabalho, permitindo automatizar os cálculos e facilitar a comparação entre os resultados analíticos e numéricos.

A determinação da carga crítica foi baseada na teoria clássica de flambagem de placas, utilizando os coeficientes de rigidez à flexão obtidos a partir da Teoria Clássica da Laminação. Para a obtenção do coeficiente de flambagem (k_c), foram adotadas as mesmas condições de contorno utilizadas na modelagem numérica e descritas no Capítulo 3. O valor do coeficiente foi obtido por meio das curvas apresentadas por Bruhn (1973), em função da razão geométrica entre os lados da placa (a/b) e das condições de apoio consideradas.

A partir dos valores de k_c e dos coeficientes da matriz de rigidez à flexão, foi determinada a carga crítica de flambagem para cada configuração analisada, conforme a Figura 12. Em seguida, os valores de carga crítica foram convertidos em tensão crítica de flambagem por meio da espessura total do laminado, permitindo a comparação entre placas com diferentes números de camadas.

A Tabela 6 apresenta os resultados obtidos para a carga crítica de flambagem (N_x) e para a tensão crítica correspondente. Observa-se que o aumento do número de camadas promove um crescimento significativo da resistência à flambagem, resultado diretamente associado ao aumento da rigidez à flexão do laminado. Esse comportamento está de acordo com a relação cúbica existente entre a rigidez à flexão e a espessura da placa, prevista pela Teoria Clássica da Laminação.

Tabela 6. Resultados analíticos de N_x crítico e tensão crítica de flambagem

Empilhamento	Nº de camadas	N_x em N/mm	σ em MPa
[0/90/0]	3	5,01	3,34
[0/90/0]s	6	40,05	13,35
[0/90/0]s	12	320,40	53,40
[45/0/45]	3	3,57	2,38
[45/0/45]s	6	28,559	9,52
[45/0/45]s	12	228,47	38,078
[0/45/0]	3	5,053	3,368
[0/45/0]s	6	40,42	13,473
[0/45/0]s	12	323,365	53,894

Fonte: Autores (2026).

Os valores obtidos nesta etapa servem como referência para a interpretação dos resultados numéricos apresentados nas seções seguintes. A comparação entre os resultados analíticos e os Carga Crítica de Flambagem obtidos por meio do Método dos Elementos Finitos permite avaliar a coerência do modelo desenvolvido e identificar a influência da orientação das fibras e da espessura do laminado sobre o comportamento de flambagem das placas compósitas.

4.2. Resultados do laminado [0/45/0]

A primeira configuração analisada foi o laminado [0/45/0], composto por camadas externas orientadas a 0° e uma camada interna orientada a 45° . Essa disposição foi selecionada por combinar elevada rigidez longitudinal, proporcionada pelas camadas alinhadas com a direção do carregamento, com um incremento na rigidez ao cisalhamento decorrente da presença da camada inclinada. Dessa forma, espera-se que o laminado apresente comportamento intermediário entre configurações predominantemente longitudinais e configurações com maior influência dos efeitos de cisalhamento.

Os resultados obtidos por meio das análises de flambagem realizadas no software FEMAP/NX Nastran são apresentados na **Tabela 7**, na qual se observam os Carga Crítica de Flambagem críticos calculados para os laminados com três, seis e doze camadas. Em seguida, a Fonte: Autores (2026).

Tabela 8 apresenta os coeficientes mais relevantes da matriz de rigidez à flexão, permitindo relacionar o comportamento estrutural da placa com a evolução da rigidez do laminado. Para essa configuração, os Carga Crítica de Flambagem obtidos foram de 4,895 N/mm, 38,617 N/mm e 305,281 N/mm para os laminados com três, seis e doze camadas, respectivamente. Os coeficientes D11, D22 e D66 também apresentaram crescimento expressivo com o aumento do número de camadas, indicando elevação significativa da rigidez à flexão e da rigidez ao cisalhamento do sistema.

Tabela 7. Carga Críticas de Flambagem obtidas para o laminado [0/45/0] em N/mm.

Nº de camadas	Carga Crítica de Flambagem
3	4,895
6	38,617

12	305,281
----	---------

Fonte: Autores (2026).

Tabela 8. Coeficientes da matriz D para o laminado [0/45/0] em N/mm.

Nº Camadas	D11	D22	D66
3	14167,6	4425,4	1504,1
6	99653,6	39701,5	16726,6
12	769854	326209	143201

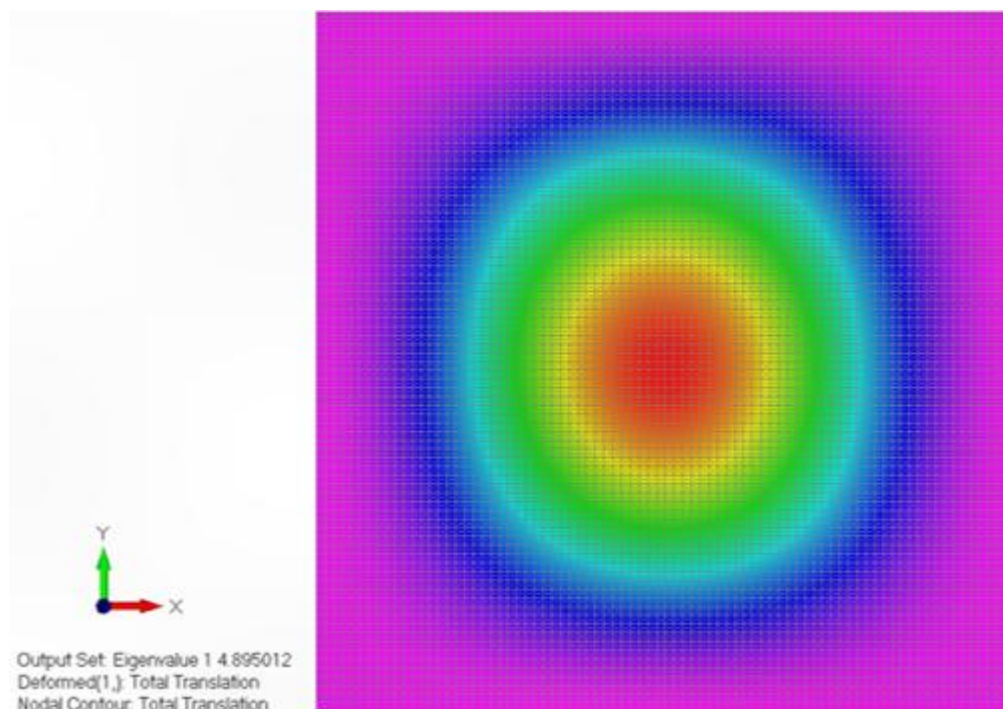
Fonte: Autores (2026).

Observa-se que o aumento do número de camadas promoveu crescimento acentuado da Carga Crítica de Flambagem crítica de flambagem. Esse comportamento está diretamente associado ao aumento da espessura total do laminado e, principalmente, ao crescimento dos coeficientes da matriz D, que representam a rigidez à flexão da placa. Entre esses coeficientes, o termo D11 merece destaque, pois está relacionado à rigidez à flexão na direção longitudinal do laminado, coincidindo com a direção principal do carregamento compressivo aplicado no modelo. Dessa forma, o crescimento de D11 contribui de maneira decisiva para o aumento da carga crítica necessária para o início da instabilidade.

A Figura 16, Figura 17 e Figura 18 apresentam os primeiros modos de flambagem obtidos para o laminado [0/45/0] nas três espessuras analisadas. Em todos os casos, observa-se um modo de flambagem de caráter global, com deslocamento transversal máximo concentrado na região central da placa e redução dos deslocamentos nas bordas em razão das condições de contorno impostas ao modelo. Esse comportamento é compatível com a flambagem de placas submetidas à compressão uniaxial e indica que a instabilidade ocorre de forma predominante em todo o painel, e não por mecanismos localizados.

A Figura 16 apresenta o primeiro modo de flambagem do laminado [0/45/0] com três camadas. Observa-se um modo global de flambagem, com deslocamento transversal máximo concentrado na região central da placa e deslocamentos reduzidos ao longo das bordas, em função das condições de contorno impostas ao modelo. Esse comportamento é compatível com a flambagem de placas simplesmente apoiadas submetidas à compressão uniaxial, evidenciando que a perda de estabilidade ocorre de forma predominante no painel como um todo, e não por mecanismos localizados.

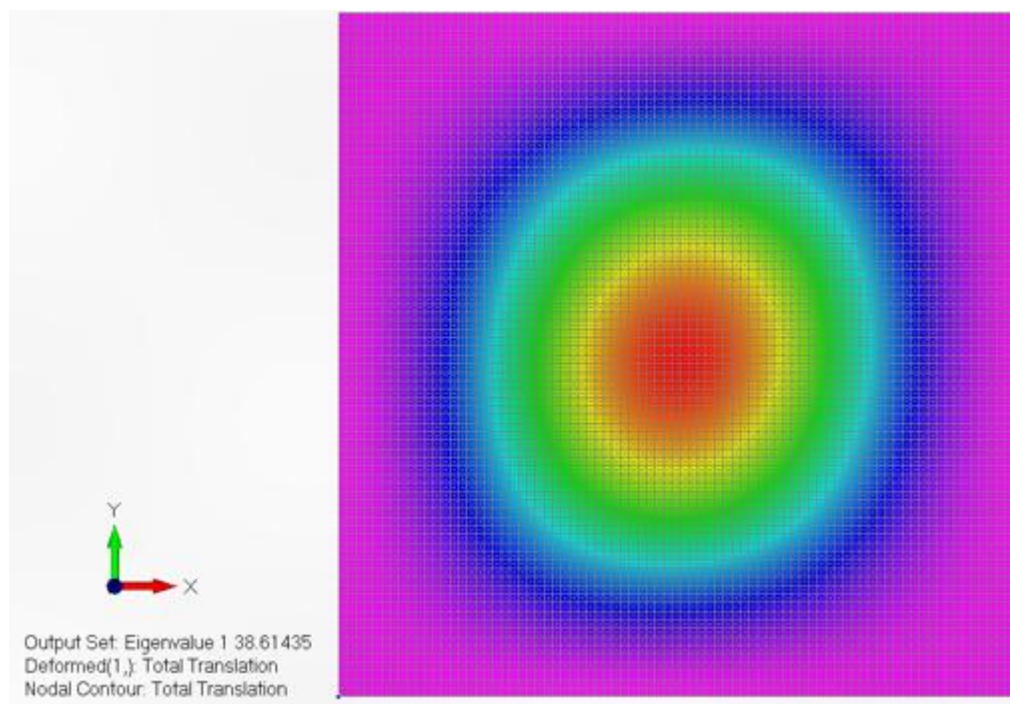
Figura 16. Primeiro modo de flambagem do laminado [0/45/0] com 3 camadas



Fonte: Autores (2026).

A Figura 17, correspondente ao laminado [0/45/0] com seis camadas, mostra que o primeiro modo de flambagem mantém essencialmente o caráter global observado na configuração de três camadas. O deslocamento máximo continua localizado na região central da placa, enquanto as bordas apresentam menor deslocamento transversal devido às restrições impostas pelo modelo numérico. Embora a forma modal permaneça semelhante, a diferença mais importante entre as duas configurações está no valor da Carga Crítica de Flambagem crítico. Ao passar de três para seis camadas, o Carga Crítica de Flambagem cresce de 4,895 N/mm para 38,617 N/mm, evidenciando aumento expressivo da estabilidade estrutural. Esse resultado está diretamente relacionado ao aumento da rigidez à flexão do laminado, refletido pelos maiores valores dos coeficientes da matriz D , sobretudo de D_{11} . Assim, a Figura 15 mostra que o acréscimo de espessura não altera de forma significativa o padrão do primeiro modo de flambagem, mas eleva de maneira substancial a carga crítica necessária para a perda de estabilidade.

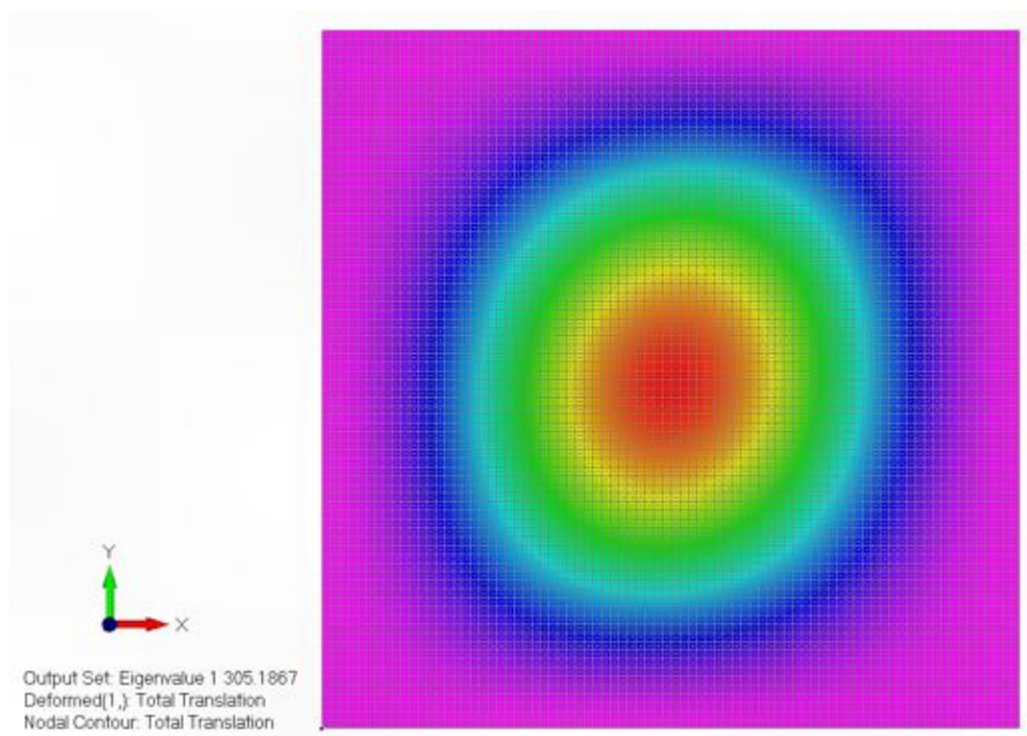
Figura 17. Primeiro modo de flambagem do laminado [0/45/0] com 6 camadas.



Fonte: Autores (2026).

Na Figura 18, referente ao laminado [0/45/0] com doze camadas, observa-se novamente um primeiro modo de flambagem de caráter global, com deformação predominante no centro da placa. A manutenção desse padrão modal indica que o mecanismo de instabilidade permanece o mesmo ao longo das três espessuras analisadas. Entretanto, a resistência à flambagem continua aumentando de forma bastante acentuada, uma vez que o Carga Crítica de Flambagem crítico atinge 305,1867 N/mm, valor muito superior aos obtidos para as configurações com três e seis camadas. Esse comportamento confirma a forte influência da espessura e da rigidez à flexão na resposta do laminado à compressão uniaxial. Como a rigidez à flexão cresce de forma não linear com a distância das lâminas em relação ao plano médio, o aumento do número de camadas produz uma elevação significativa da resistência à flambagem, mesmo sem modificar de maneira relevante a forma do primeiro modo.

Figura 18. Primeiro modo de flambagem do laminado [0/45/0] com 12 camadas.



Fonte: Autores (2026)

A comparação entre as Figura 16, Figura 17 e Figura 18 permite concluir que, para o laminado [0/45/0], o aumento do número de camadas produz principalmente um ganho de estabilidade estrutural, sem alterar de forma relevante o padrão do primeiro modo de flambagem. Em todas as configurações analisadas, a flambagem ocorre de maneira global, com deslocamento máximo na região central da placa, indicando coerência entre os resultados numéricos obtidos. A principal diferença entre os casos está, portanto, na magnitude da carga crítica, que cresce de forma expressiva à medida que a rigidez à flexão do laminado aumenta.

De modo geral, os resultados obtidos para o laminado [0/45/0] mostram que a presença de camadas externas orientadas a 0° favorece a resistência à flambagem sob compressão uniaxial, uma vez que essas lâminas contribuem diretamente para o aumento da rigidez longitudinal e da rigidez à flexão na direção do carregamento. A camada central a 45° , por sua vez, contribui para a resposta ao cisalhamento sem comprometer o desempenho global da configuração. Assim, o laminado [0/45/0] apresentou comportamento estrutural consistente, caracterizado por Carga Crítica de Flambagem crescentes com o aumento da espessura e pela manutenção de um padrão modal estável ao longo das espessuras analisadas.

4.3. Resultados do laminado [45/0/45]

A segunda configuração analisada corresponde ao laminado [45/0/45], composto por camadas externas orientadas a 45° e camada central orientada a 0° . Diferentemente do laminado [0/45/0], nessa sequência de empilhamento as lâminas inclinadas ocupam as regiões mais afastadas do plano médio, o que altera a distribuição da rigidez à flexão ao longo da espessura. Como as camadas externas possuem maior influência sobre o comportamento flexional da placa, essa modificação na arquitetura do laminado tende a impactar diretamente sua resposta à flambagem.

Os resultados obtidos para essa configuração são apresentados na Tabela 9, que reúne os Carga Crítica de Flambagens críticos de flambagem, e na Tabela 10, que apresenta os principais coeficientes da matriz de rigidez à flexão. Para o laminado [45/0/45], os Carga Crítica de Flambagens obtidos foram de 4,059 N/mm, 34,399 N/mm e 276,425 N/mm para os modelos com três, seis e doze camadas, respectivamente. Assim como observado na configuração anterior, os coeficientes D11, D22 e D66 aumentam com o número de camadas, evidenciando o crescimento da rigidez global do laminado à medida que a espessura é ampliada.

Tabela 9. Carga Crítica de Flambagem obtidos para o laminado [45/0/45] em N/mm.

Nº de camadas	Carga Crítica de Flambagem
3	4,059
6	34,399
12	276,425

Fonte: Autores (2026).

Tabela 10. Coeficientes da matriz D para o laminado [45/0/45] em N/mm.

Nº de camadas	D11	D22	D66
3	7038,9	6664,2	3949,0
6	69998,3	49015,1	26897,5
12	587360	383523	205791

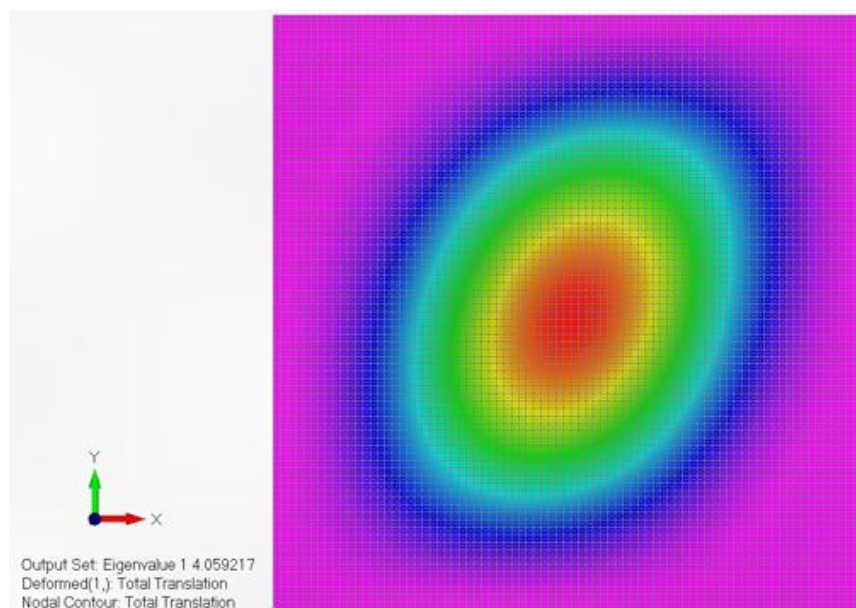
Fonte: Autores (2026).

Apesar desse aumento, a comparação com o laminado $[0/45/0]$ mostra que a configuração $[45/0/45]$ apresentou autovalores menores em todas as espessuras analisadas. Esse resultado indica que, para o carregamento de compressão uniaxial considerado neste trabalho, não apenas a magnitude da rigidez, mas também a forma como ela se distribui ao longo da espessura do laminado, exerce papel determinante na resistência à flambagem. Em outras palavras, a arquitetura do empilhamento influencia diretamente a eficiência com que o laminado resiste à instabilidade.

As Figura 19, Figura 20 e Figura 21 apresentam os primeiros modos de flambagem do laminado $[45/0/45]$ para os modelos com três, seis e doze camadas. Assim como no caso do laminado $[0/45/0]$, observa-se em todas as configurações um modo de flambagem de caráter global, com deslocamento máximo na região central da placa e menores deslocamentos nas bordas. Isso mostra que a alteração da sequência de empilhamento não modifica de forma substancial a forma do primeiro modo, mas afeta a magnitude da carga crítica associada ao início da instabilidade.

A Figura 19, referente ao laminado $[45/0/45]$ com três camadas, representa a condição de menor espessura dessa configuração e apresenta autovalor crítico igual a 4,059 N/mm. Embora o modo deformado seja semelhante ao observado para o laminado $[0/45/0]$ com três camadas, o valor do autovalor é inferior, indicando menor resistência à flambagem. Essa diferença pode ser explicada pela posição das lâminas orientadas a 45° nas faces externas do laminado. Como as camadas mais afastadas do plano médio exercem maior influência sobre a rigidez à flexão, a substituição das lâminas externas orientadas a 0° por lâminas inclinadas reduz a contribuição mais diretamente associada à resistência da placa à flambagem sob compressão uniaxial. Em contrapartida, essa disposição tende a aumentar a participação de mecanismos relacionados ao cisalhamento, refletidos principalmente na contribuição do coeficiente D66. Assim, a Figura 17 evidencia que a alteração da sequência de empilhamento modifica a eficiência estrutural do laminado, mesmo sem alterar significativamente o formato do primeiro modo de flambagem.

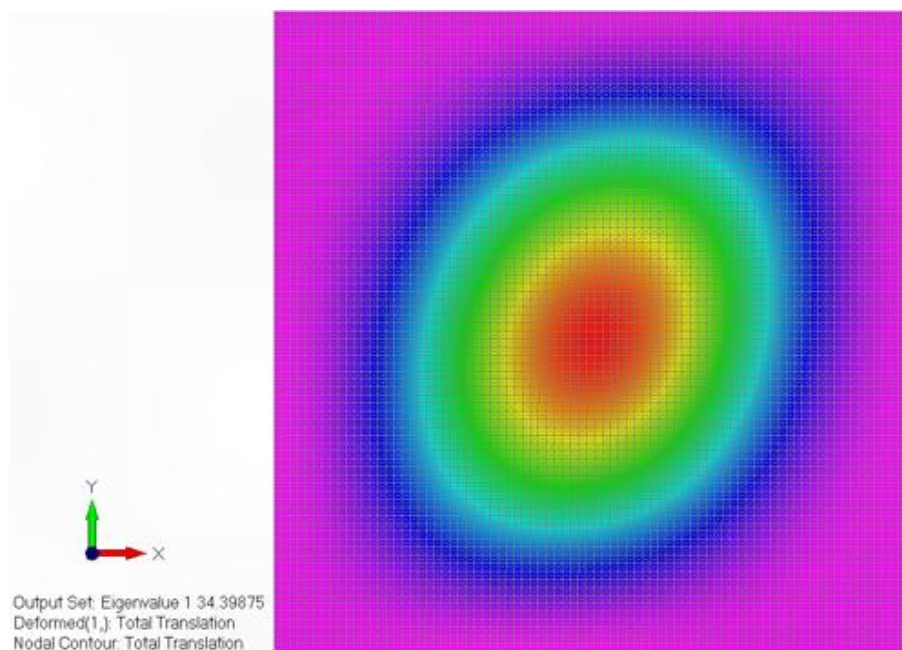
Figura 19. Primeiro modo de flambagem do laminado [45/0/45] com 3 camadas.



Fonte: Autores (2026).

Na Figura 20, correspondente ao laminado [45/0/45] com seis camadas, observa-se novamente um primeiro modo de flambagem de caráter global, com distribuição de deslocamentos semelhante àquela verificada para a configuração de três camadas. O autovalor crítico, entretanto, aumenta para 34,399 N/mm, demonstrando que o acréscimo de espessura e o aumento da rigidez à flexão elevam a resistência à perda de estabilidade. Ainda assim, esse valor permanece inferior ao obtido para o laminado [0/45/0] com seis camadas, o que reforça a importância da orientação das camadas externas. Embora o laminado [45/0/45] apresente crescimento expressivo de rigidez com o aumento do número de camadas, a presença de lâminas inclinadas nas faces externas faz com que parte dessa rigidez seja direcionada a mecanismos menos eficientes para resistir à flambagem provocada por compressão uniaxial na direção principal do painel.

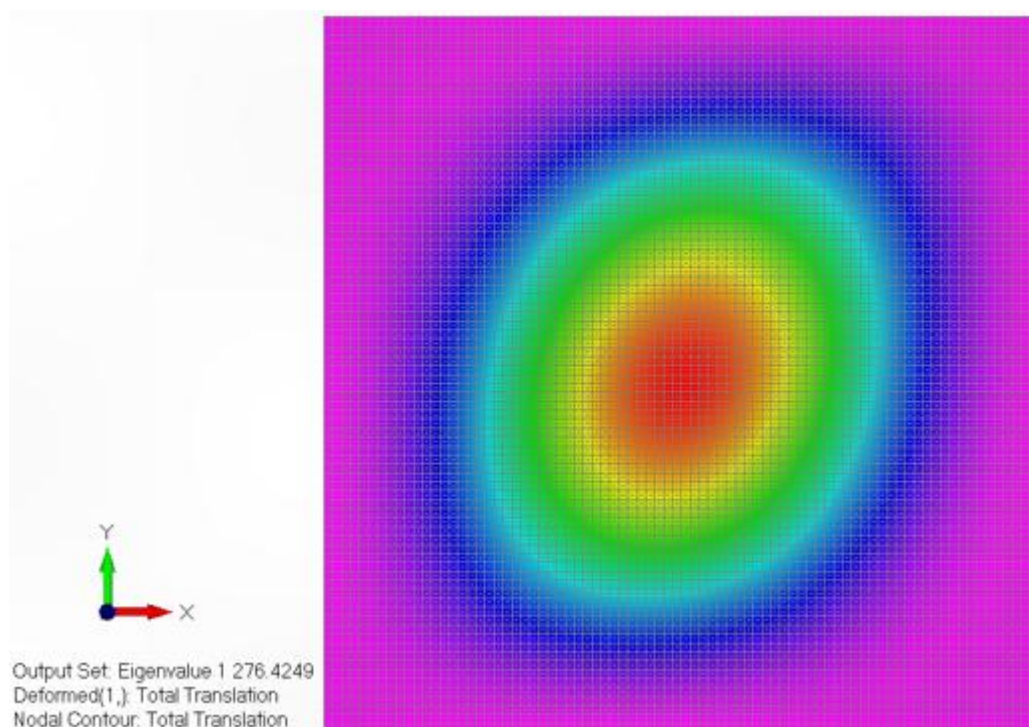
Figura 20. Primeiro modo de flambagem do laminado [45/0/45] com 6 camadas.



Fonte: Autores (2026)

A Figura 21, referente ao laminado [45/0/45] com doze camadas, confirma a mesma tendência observada nas demais configurações. O primeiro modo de flambagem permanece global, com deslocamento máximo na região central da placa, enquanto o autovalor crítico atinge 276,425 N/mm, evidenciando aumento substancial da carga crítica em relação aos casos com três e seis camadas. Esse comportamento está associado ao aumento da espessura total do laminado e ao consequente crescimento dos coeficientes da matriz D. No entanto, mesmo com esse ganho expressivo de rigidez, a configuração [45/0/45] permanece menos eficiente do que o laminado [0/45/0] para resistir à flambagem sob o carregamento analisado, o que confirma a relevância da arquitetura do empilhamento na resposta estrutural do painel.

Figura 21. Primeiro modo de flambagem do laminado [45/0/45] com 12 camadas



Fonte: Autores (2026)

A análise conjunta das Figura 19, Figura 20 e Figura 21 mostra que, para o laminado [45/0/45], o aumento do número de camadas também promove elevação significativa da carga crítica de flambagem, sem alterar de forma substancial o padrão do primeiro modo. Em todas as espessuras avaliadas, a flambagem ocorre de maneira global e com deslocamento máximo na região central da placa, indicando consistência entre os resultados numéricos obtidos. A principal diferença em relação ao laminado [0/45/0] está, portanto, na magnitude dos autovalores e na eficiência da sequência de empilhamento para resistir ao carregamento compressivo.

De forma geral, os resultados obtidos para o laminado [45/0/45] indicam que a presença de camadas externas orientadas a 45° altera a distribuição da rigidez no laminado e aumenta a participação dos efeitos associados ao cisalhamento. Entretanto, para o caso de compressão uniaxial analisado neste trabalho, essa configuração mostrou-se menos eficiente do que aquela com camadas externas orientadas a 0°, uma vez que apresentou autovalores críticos inferiores em todas as espessuras consideradas. Dessa forma, conclui-se que a posição das lâminas externas exerce papel decisivo na resistência à flambagem, sendo mais

vantajosa, para o presente problema, a adoção de camadas externas alinhadas à direção do carregamento.

4.4. Resultados do laminado [0/90/0]

A configuração [0/90/0] foi selecionada por representar um laminado constituído exclusivamente por fibras orientadas nas direções principais do material, sem a presença de camadas inclinadas. Nessa sequência de empilhamento, as camadas externas encontram-se orientadas a 0° , isto é, alinhadas à direção do carregamento compressivo aplicado, enquanto a camada central está orientada a 90° . Essa disposição favorece o aumento da rigidez longitudinal do laminado e, ao mesmo tempo, proporciona contribuição adicional à rigidez transversal, resultando em uma distribuição mais equilibrada da rigidez à flexão ao longo da placa.

Os resultados das análises de flambagem para essa configuração são apresentados na Tabela 11, que reúne as cargas críticas de flambagem obtidas para os laminados com três, seis e doze camadas, e na Tabela 12, que apresenta os coeficientes mais relevantes da matriz de rigidez à flexão. Para o laminado [0/90/0], as cargas críticas de flambagem calculadas foram de 5,105 N/mm, 39,589 N/mm e 320,860 N/mm para os modelos com três, seis e doze camadas, respectivamente. Em paralelo, os coeficientes D11, D22 e D66 também aumentaram significativamente com o crescimento do número de camadas, refletindo o acréscimo da rigidez global do laminado.

Tabela 11. Carga Crítica de Flambagem obtidos para o laminado [0/90/0] em N/mm.

Nº de camadas	Carga Crítica de Flambagem
3	5,105
6	39,589
12	320,860

Fonte: Autores (2026).

Tabela 12. Coeficientes da matriz D para o laminado [0/90/0] em N/mm.

Nº de camadas	D11	D22	D66
3	14078,0	4710,5	1406,3
6	94638,6	35669,7	11250,0
12	721137	481329	90000

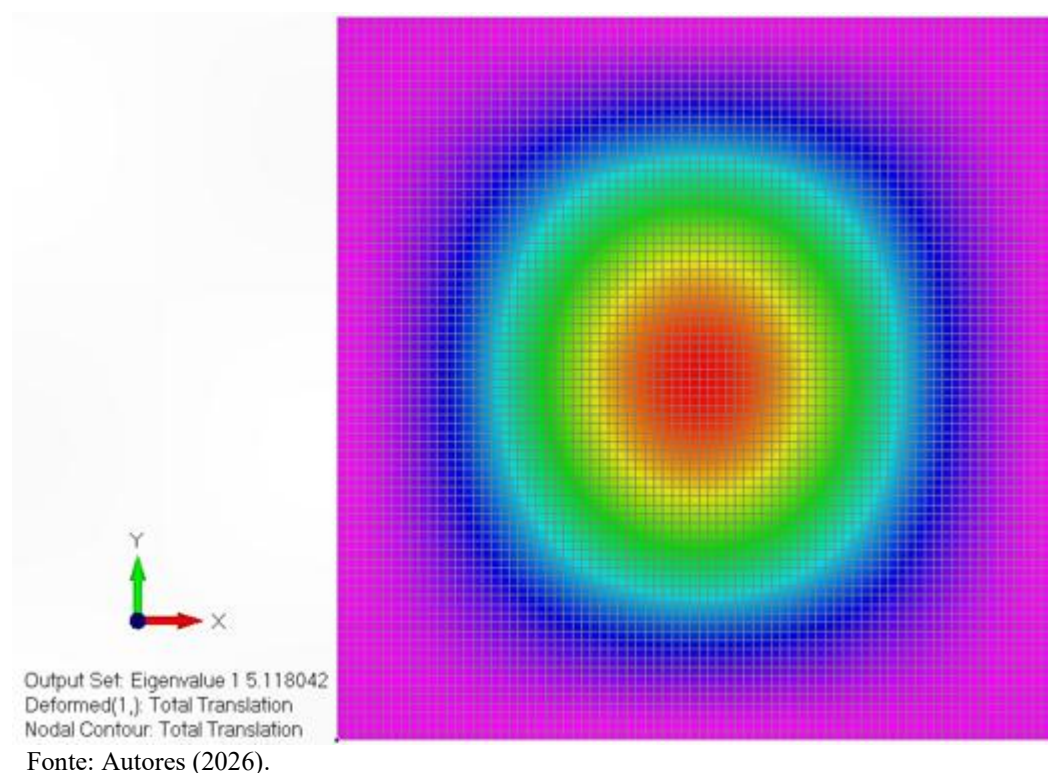
Fonte: Autores (2026).

A análise dos resultados mostra que o laminado [0/90/0] apresentou as maiores cargas críticas de flambagem dentre as configurações avaliadas neste trabalho, o que indica desempenho superior frente à flambagem sob compressão uniaxial. Esse comportamento pode ser explicado pela combinação favorável entre as orientações das camadas e a posição de cada lâmina ao longo da espessura. Como as camadas externas estão orientadas a 0° , elas contribuem de forma direta para o aumento da rigidez à flexão na direção do carregamento, elevando principalmente o coeficiente D_{11} . Ao mesmo tempo, a camada central orientada a 90° contribui para o aumento da rigidez transversal, favorecendo um comportamento estrutural mais equilibrado do painel. Como resultado, o laminado apresenta elevada capacidade de resistir à perda de estabilidade sem depender de mecanismos associados ao acoplamento ou ao aumento da rigidez ao cisalhamento, como ocorre em laminados contendo camadas a 45° .

As Figura 22, Figura 23 e Figura 24 apresentam os primeiros modos de flambagem obtidos para o laminado [0/90/0] nas três espessuras analisadas. Em todas as configurações, observa-se um modo global de flambagem, com deslocamento transversal máximo concentrado na região central da placa e menores deslocamentos nas bordas, comportamento compatível com as condições de contorno impostas ao modelo numérico. Assim como nas demais sequências de empilhamento analisadas, a forma do primeiro modo se mantém global ao longo das diferentes espessuras, indicando que a principal influência do aumento do número de camadas está na magnitude da carga crítica de flambagem, e não na natureza do modo deformado.

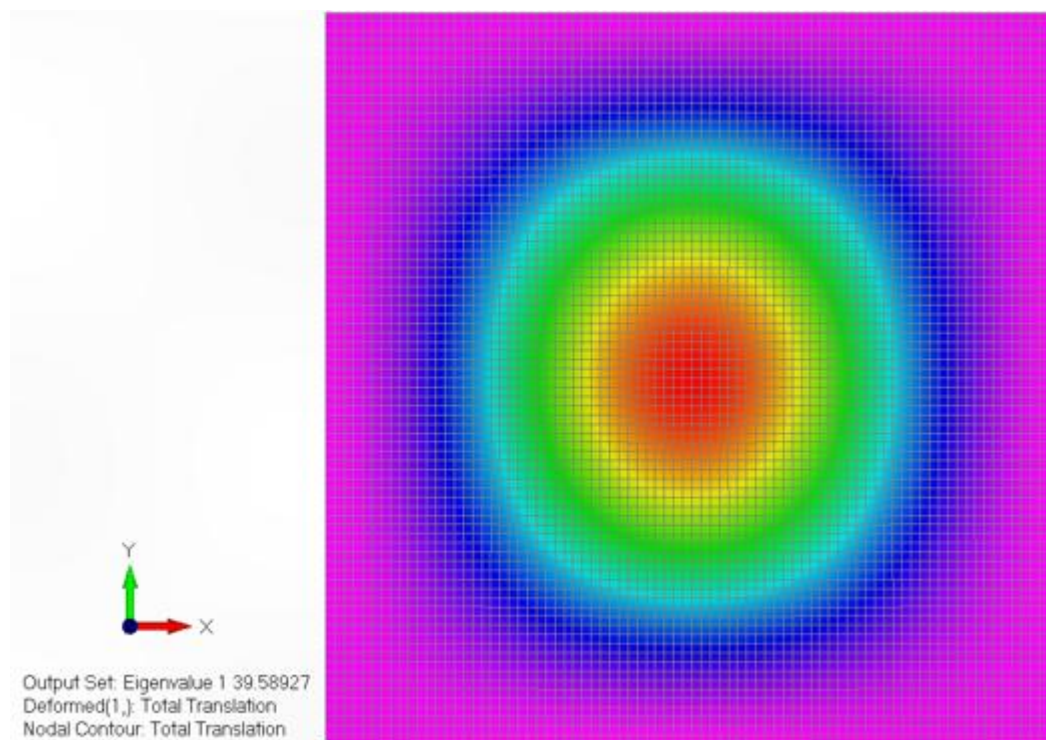
A Figura 22, referente ao laminado [0/90/0] com três camadas, representa a configuração de menor espessura dessa sequência de empilhamento. Nessa condição, a carga crítica de flambagem obtida foi de 5,105 N/mm, valor ligeiramente superior ao observado para os laminados [0/45/0] e [45/0/45] com o mesmo número de camadas. Embora a diferença numérica ainda seja relativamente pequena nessa espessura, ela já evidencia a influência positiva da presença de camadas externas orientadas a 0° e da ausência de lâminas inclinadas. O primeiro modo deformado mantém o padrão de flambagem global, com uma semi-onda predominante na região central da placa, o que indica que o painel perde estabilidade de forma uniforme e sem alteração significativa na distribuição dos deslocamentos ao longo da superfície.

Figura 22. Primeiro modo de flambagem do laminado [0/90/0] com 3 camadas.



Na Figura 23, correspondente ao laminado [0/90/0] com seis camadas, observa-se novamente um primeiro modo de flambagem de caráter global, com deformação concentrada no centro da placa e comportamento semelhante ao verificado para a configuração com três camadas. A principal diferença está na carga crítica de flambagem, que cresce para 39,589 N/mm, demonstrando aumento expressivo da resistência à flambagem. Esse crescimento está diretamente associado ao aumento da espessura do laminado e à elevação dos coeficientes da matriz D, especialmente de D11 e D22. Em comparação com os laminados contendo camadas a 45°, a configuração [0/90/0] apresenta uma distribuição de rigidez mais eficiente para o caso de compressão uniaxial analisado, pois combina elevada rigidez longitudinal com rigidez transversal significativa, sem introduzir efeitos de acoplamento associados às lâminas inclinadas.

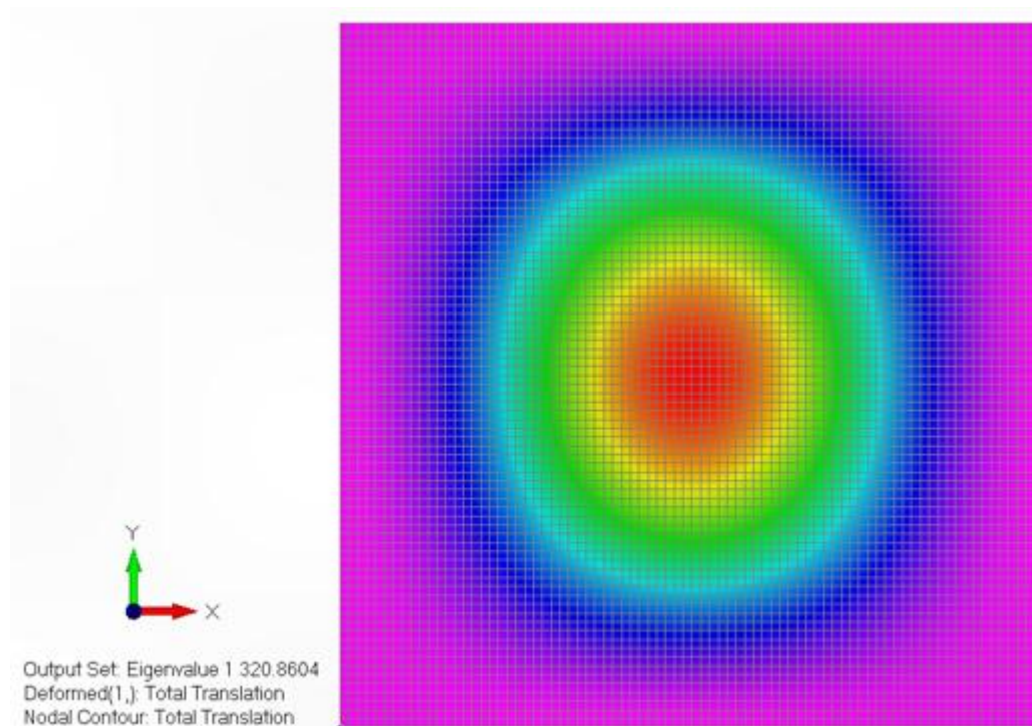
Figura 23. Primeiro modo de flambagem do laminado [0/90/0] com 6 camadas.



Fonte: Autores (2026).

A Figura 24, referente ao laminado [0/90/0] com doze camadas, confirma a mesma tendência observada nas demais espessuras. O primeiro modo de flambagem permanece global, com deslocamento máximo localizado na região central da placa, enquanto a carga crítica de flambagem atinge 320,860 N/mm, o maior valor obtido entre todos os laminados avaliados no presente estudo. Esse resultado evidencia de forma clara a influência da espessura e da arquitetura do empilhamento sobre a resistência à flambagem. O aumento do número de camadas eleva significativamente a rigidez à flexão do laminado, e a presença de fibras orientadas exclusivamente nas direções 0° e 90° contribui para uma resposta estrutural mais eficiente sob compressão longitudinal, sobretudo pela combinação entre elevados valores de D11 e D22.

Figura 24. Primeiro modo de flambagem do laminado [0/90/0] com 12 camadas.



Fonte: Autores (2026).

O laminado [0/90/0] apresentou os maiores Carga Crítica de Flambagem obtidos neste estudo. O comportamento observado está diretamente relacionado aos elevados valores simultâneos de D11 e D22, indicando alta rigidez à flexão tanto na direção longitudinal quanto na direção transversal da placa.

De forma geral, os resultados obtidos para o laminado [0/90/0] mostram que essa foi a configuração de melhor desempenho dentre as avaliadas no presente trabalho. O comportamento observado está diretamente relacionado à combinação entre camadas externas orientadas a 0°, responsáveis por elevar a rigidez à flexão na direção do carregamento, e camada central orientada a 90°, que contribui para o aumento da rigidez transversal e para uma distribuição mais equilibrada da rigidez do painel. Como consequência, o laminado apresentou as maiores cargas críticas de flambagem e demonstrou elevada capacidade de resistir à instabilidade causada pelo carregamento compressivo considerado neste estudo.

4.5. Comparação geral dos resultados

Após a análise individual das configurações [0/90/0], [45/0/45], [0/45/0] e [90/0/90], foi elaborada uma tabela-resumo contendo os principais parâmetros avaliados neste trabalho. A comparação simultânea dos resultados permite visualizar a influência da orientação das fibras e da espessura do laminado sobre os Carga Crítica de Flambagem críticos de flambagem.

Tabela 13. Resumo dos resultados obtidos para os laminados analisados.

Configuração	Nº de camadas	Espessura total	Analítico		FEMAP	Diferença [%]
			σ_{cr} [MPa]	N_x [N/mm]	N_x [N/mm]	
[0/90/0]	3	1,5 mm	3,34	5,01	5,12	2%
[0/90/0] _s	6	3,0 mm	13,35	40,05	40,49	1%
[0/90/0] _{2s}	12	6,0 mm	53,40	320,40	320,72	0%
[45/0/45]	3	1,5 mm	2,38	3,57	4,06	12%
[45/0/45] _s	6	3,0 mm	9,52	28,56	34,40	17%
[45/0/45] _{2s}	12	6,0 mm	38,08	228,47	276,42	17%
[0/45/0]	3	1,5 mm	3,37	5,05	4,90	3%
[0/45/0] _s	6	3,0 mm	13,47	40,42	38,61	4%
[0/45/0] _{2s}	12	6,0 mm	53,89	323,36	305,19	6%

Fonte: Autores (2026)

Observa-se que o aumento da espessura resultou em um crescimento significativo dos Carga Crítica de Flambagem críticos para todas as sequências de empilhamento avaliadas. Esse comportamento está diretamente associado ao aumento dos coeficientes da matriz D, responsáveis pela rigidez à flexão do laminado. Entre as configurações analisadas, os laminados contendo maior predominância de fibras orientadas a 0° apresentaram os maiores Carga Crítica de Flambagem, indicando maior resistência à flambagem sob compressão na direção considerada.

5. CONCLUSÃO

O presente trabalho teve como objetivo analisar a influência da orientação das fibras e da espessura de laminados compósitos sobre o comportamento de flambagem de um painel submetido à compressão uniaxial. Para isso, foram estudadas diferentes configurações de empilhamento, utilizando como base o modelo apresentado por *Lengvarský, Bocko e Hagara* (2016), sendo empregada a Teoria Clássica dos Laminados para a determinação das propriedades equivalentes e o Método dos Elementos Finitos para a realização das análises numéricas.

Os resultados obtidos demonstraram que a orientação das fibras exerce influência significativa sobre a resistência à flambagem dos laminados. Verificou-se que diferentes sequências de empilhamento produziram distintas distribuições de rigidez estrutural, refletindo diretamente nos valores dos Carga Crítica de Flambagem críticos obtidos nas análises. Dessa forma, confirmou-se que a disposição das camadas ao longo da espessura do laminado constitui um parâmetro fundamental para o desempenho estrutural de painéis compósitos submetidos a carregamentos compressivos.

Observou-se também que o aumento do número de camadas resultou em crescimento expressivo da carga crítica de flambagem para todas as configurações analisadas. Esse comportamento está associado ao aumento da rigidez à flexão do laminado, representada pelos coeficientes da matriz D , que apresentaram valores significativamente superior para os laminados de maior espessura.

Entre as configurações avaliadas, o laminado $[0/90/0]$ apresentou o melhor desempenho global, especialmente para os casos contendo seis e doze camadas, alcançando os maiores Carga Crítica de Flambagem de flambagem observados neste estudo. Esse resultado evidencia que a combinação de camadas orientadas a 0° e 90° proporciona uma distribuição mais equilibrada da rigidez estrutural, favorecendo a resistência à instabilidade quando a placa é submetida à compressão uniaxial.

Por outro lado, o laminado $[45/0/45]$ apresentou os menores Carga Crítica de Flambagem dentre as configurações analisadas. Embora tenha demonstrado maior contribuição para a rigidez ao cisalhamento, a redução da rigidez longitudinal resultou em menor resistência à flambagem, evidenciando a importância da orientação das fibras externas para o comportamento estrutural da placa.

De maneira geral, os resultados obtidos permitiram concluir que tanto a orientação das fibras quanto a espessura do laminado influenciam diretamente a carga crítica de flambagem dos painéis compósitos. Além disso, foi possível verificar que a utilização da Teoria Clássica dos Laminados em conjunto com o Método dos Elementos Finitos constitui uma abordagem eficiente para a análise da estabilidade estrutural de placas laminadas.

Como sugestão para trabalhos futuros, recomenda-se a realização de análises não lineares de flambagem, a investigação de outras sequências de empilhamento, a utilização de diferentes materiais compósitos e a realização de estudos experimentais que permitam validar os resultados numéricos obtidos. Também podem ser exploradas geometrias distintas e condições de contorno mais próximas das encontradas em aplicações aeronáuticas reais.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- BRUHN, E. F. *Analysis and Design of Flight Vehicle Structures*. 2. ed. Carmel, Indiana: Jacobs Publishing Inc., 1973. 650 p.
- CHAI, Gin Boay. Buckling of generally laminated composite plates with various edge support conditions. *Composite Structures*, v. 29, n. 3, p. 299-310, 1994.
- CROUZET-PASCAL, J. Buckling analysis of laminated composite plates. *Fibre Science and Technology*, v. 11, p. 413-446, 1978.
- DASH, Padmanav; SINGH, B. N. Buckling and post-buckling of laminated composite plates. *Mechanics Research Communications*, v. 46, p. 1-7, 2012.
- EL YAAKOUBI-MESBAH, C.; MITTELSTEDT, C. Closed-form analytical solution for local buckling of omega-stringer-stiffened composite panels under compression. *Composite Structures*, 2025.
- KASSAPOGLOU, Christos. *Design and analysis of composite structures: with applications to aerospace structures*. Chichester: John Wiley & Sons, 2010.
- DANIEL, Isaac M.; ISHAI, Ori. *Engineering mechanics of composite materials*. 2. ed. New York: Oxford University Press, 2006.
- JONES, Robert M. *Mechanics of composite materials*. 2. ed. Philadelphia: Taylor & Francis, 1999.
- KASSAPOGLOU, Christos. *Design and analysis of composite structures: with applications to aerospace structures*. 2. ed. Chichester: John Wiley & Sons, 2010.
- KOLLÁR, László P.; SPRINGER, George S. *Mechanics of composite structures*. Cambridge: Cambridge University Press, 2003.
- LEISSA, Arthur W. *Buckling of laminated composite plates and shells*. Virginia: NASA, 1987.

LENGVARSKÝ, Peter; BOCKO, Jozef; HAGARA, Martin. The buckling analysis of the composite plates with different orientations of layers. *American Journal of Mechanical Engineering*, v. 4, n. 7, p. 399–403, 2016.

TURVEY, Gordon J.; MARSHALL, Ian H. Buckling and postbuckling of composite plates. London: Chapman & Hall, 1995.

DÍAS, D. A.; ARBELO, M. A.; DE ALMEIDA, S. F. M. Projeto de dispositivo de ensaio de pós flambagem em painéis reforçados de material compósito com carga de cisalhamento no plano. In: BRAZILIAN SYMPOSIUM ON AEROSPACE ENGINEERING & APPLICATIONS, 2009, São José dos Campos. Anais... São José dos Campos: AAB, 2009. p. 1-10.