

**FACULDADE DE TECNOLOGIA DE SÃO JOSÉ DOS CAMPOS
FATEC PROFESSOR JESSEN VIDAL**

**PEDRO HENRIQUE SANTOS SILVA
RAMON HENRIQUE MENDONÇA NOGUEIRA
TALES GUILHERME DE OLIVEIRA BISPO**

**ANÁLISE DE OTIMIZAÇÃO TOPOLÓGICA EM UM
SUPORTE DE BATERIAS PARA UM VEÍCULO AÉREO
NÃO TRIPULADO (UAV)**

São José dos Campos
2024

**PEDRO HENRIQUE SANTOS SILVA
RAMON HENRIQUE MENDONÇA NOGUEIRA
TALES GUILHERME DE OLIVEIRA BISPO**

**ANÁLISE DE OTIMIZAÇÃO TOPOLÓGICA EM UM
SUPORTE DE BATERIAS PARA UM VEÍCULO AÉREO
NÃO TRIPULADO (UAV)**

Trabalho de Graduação apresentado à Faculdade de Tecnologia de São José dos Campos, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do título de Tecnólogo em Projetos de Estruturas Aeronáuticas.

**Orientador: Me. Fabiana Eloisa Passador
Co-orientador: Me. Lucas Giovanetti**

São José dos Campos
2024

Dados Internacionais de Catalogação-na-Publicação (CIP)
Divisão de Informação e Documentação

SILVA, Pedro Henrique Santos
 NOGUEIRA, Ramon Henrique Mendonça
 BISPO, Tales Guilherme de Oliveira
 Análise de Otimização Topológica em um Suporte de Baterias para um Veículo Aéreo Não Tripulado (UAV).
 São José dos Campos, 2024.
 61 f.

Trabalho de Graduação – Curso de Tecnologia em Projetos de Estruturas Aeronáuticas.
 FATEC de São José dos Campos: Professor Jessen Vidal, 2024.
 Orientador: Me. Fabiana Eloisa Passador
 Co-orientador: Me. Lucas Giovanetti

1. Otimização Topológica. 2. Redução de Massa. 3. Projeto Estrutural. I. Faculdade de Tecnologia. FATEC de São José dos Campos: Professor Jessen Vidal. Divisão de Informação e Documentação. Análise de Otimização Topológica em um Suporte de Baterias para um Veículo Aéreo Não Tripulado (UAV).

REFERÊNCIA BIBLIOGRÁFICA

SILVA, Pedro Henrique Santos; NOGUEIRA, Ramon Henrique Mendonça; BISPO, Tales Guilherme de Oliveira. **Análise de Otimização Topológica em um Suporte de Baterias Para um Veículo Aéreo Não Tripulado (UAV). 2024.** 60 f. Trabalho de Graduação - FATEC de São José dos Campos: Professor Jessen Vidal.

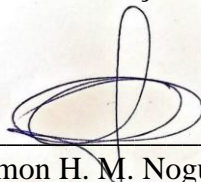
CESSÃO DE DIREITOS

NOME(S) DO(S) AUTOR(ES): Pedro Henrique Santos Silva; Ramon Henrique Mendonça Nogueira; Tales Guilherme de Oliveira Bispo
 TÍTULO DO TRABALHO: Análise de Otimização Topológica em um Suporte de Baterias Para um Veículo Aéreo Não Tripulado (UAV)
 TIPO DO TRABALHO/ANO: Trabalho de Graduação/2024.

É concedida à FATEC de São José dos Campos: Professor Jessen Vidal permissão para reproduzir cópias deste Trabalho e para emprestar ou vender cópias somente para propósitos acadêmicos e científicos. O autor reserva outros direitos de publicação e nenhuma parte deste Trabalho pode ser reproduzida sem a autorização do autor.



Pedro H. Santos Silva Av.
 Av. Cesare Monsueto
 Giulio Lattes, 1350, São
 José dos Campos - SP



Ramon H. M. Nogueira
 Av. Cesare Monsueto
 Giulio Lattes, 1350, São
 José dos Campos - SP




Tales G. de O. Bispo
 Av. Cesare Monsueto
 Giulio Lattes, 1350, São
 José dos Campos - SP

**PEDRO HENRIQUE SANTOS SILVA
RAMON HENRIQUE MENDONÇA NOGUEIRA
TALES GUILHERME DE OLIVEIRA BISPO**

**ANÁLISE DE OTIMIZAÇÃO TOPOLÓGICA EM UM
SUPORTE DE BATERIAS PARA UM VEÍCULO AÉREO
NÃO TRIPULADO (UAV)**

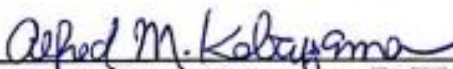
Trabalho de Graduação apresentado à Faculdade de Tecnologia de São José dos Campos, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do título de Tecnólogo em Projetos de Estruturas Aeronáuticas.



Me. Fabiana Eloisa Passador – FATEC SJC



Me. Lucas Giovanetti - FATEC SJC



Dr. Alfred Makoto Kabayama - FATEC SJC



Eng. Conrado Luiz Santiago de Almeida – Akaer Engenharia

21/06/2024

DATA DA APROVAÇÃO

AGRADECIMENTOS

À Deus, que nos fez sua imagem e nos proveu o dom da vida e da resiliência.

Aos nossos familiares, Elizangela, Rodolfo, João e Vitória (Pedro Henrique Santos Silva); Débora, Sandro, Suelen e Maitê (Ramon Henrique Nogueira Mendonça); Rogéria, José, Rodrigo e Igor (Tales Guilherme de Oliveira Bispo), por todo o apoio e incentivo durante este período universitário.

Aos nossos amigos, que sempre estiveram ao nosso lado nos ajudando direta ou indiretamente no desenvolvimento deste trabalho e durante todo o período de curso.

Aos nossos professores, em especial Fabiana Eloisa Passador, Rita de Cassia Mendonça Sales Contini e Lucas Giovanetti, pelas correções, ensinamentos e encorajamento que tanto nos foi fundamental para o processo de formação acadêmica.

Aos nossos colegas da Akaer Engenharia, que tanto nos apoiaram na formulação, pesquisa e desenvolvimento deste trabalho.

Por fim, a todos aqueles que vivemos ao longo dos anos de curso e nos incentivaram, compartilhando momentos bons e ruins que certamente contribuíram de forma significativa para a nossa formação.

“Bem-aventurado o homem que acha sabedoria, e o homem que adquire conhecimento”, Provérbios 3:13.

RESUMO

A busca por soluções de otimização estrutural eficientes é constante na engenharia, visando aprimorar a resistência estrutural e reduzir a massa. A Otimização Topológica (OT) é um método promissor que busca a melhor distribuição de material em um domínio específico, variando conforme o comportamento mecânico da estrutura. O Método de Otimização Topológica (MOT) foi introduzido por Bendsoe e Kikuchi (1988) e se baseia em microestruturas. Esta pesquisa analisa a OT com foco na otimização de *layouts*, tendo como objeto de estudo o suporte de baterias de um veículo aéreo não tripulado desenvolvido pela empresa Akaer Engenharia S.A. com o principal objetivo a redução de massa para melhor performance do drone.

Considerando as condições de contorno, foi feita a OT por meio de software próprio para esta utilização e posteriormente, aplicada as restrições de manufaturar dado que esta peça será usinada. Após isto, o modelo resultante também foi submetido a uma análise de elementos finitos para simulação dos esforços estruturais e validação da concepção do projeto.

Após todo o processo avaliativo, é possível constatar que a OT proporcionou um resultado satisfatório do ponto de vista de redução de massa e resistência mecânica do contexto proposto pelo contexto ao que a peça está submetida.

Palavras-Chave: Otimização Topológica; Redução de Massa; Projeto Estrutural.

ABSTRACT

The search for efficient structural optimization solutions is constant in engineering, aiming to enhance structural strength and reduce mass. Topological Optimization (TO) is a promising method that seeks the best material distribution in a specific domain, varying according to the mechanical behavior of the structure. The Topological Optimization Method (TOM) was introduced by Bendsøe and Kikuchi (1988) and is based on microstructures. This research analyzes TO focusing on layout optimization, with the batteries support of an unmanned aerial vehicle developed by Akaer Engenharia S.A. as the study object, with the main objective of reducing mass to improve the drone performance.

Considering the boundary conditions, topological optimization was performed using specific software for this purpose and subsequently, manufacturing constraints were applied since this part will be machined. After this, the resulting model was also subjected to finite element analysis to simulate structural efforts and validate the project's design concept.

After the entire evaluation process, it can be concluded that topological optimization provided a satisfactory result in terms of mass reduction and mechanical strength within the proposed context in which the part is subjected.

Keywords: Topological Optimization; Weight Reduction; Structural Design.

SUMÁRIO

| | |
|---|-----------|
| 1. INTRODUÇÃO | 10 |
| 1.1. Objetivo Geral | 11 |
| 1.2. Objetivos Específicos | 11 |
| 2. FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA..... | 12 |
| 2.1. Definição de Projeto Estrutural e Análise Estrutural..... | 12 |
| 2.2. Tipos de Análises Estruturais | 12 |
| 2.3. Método dos Elementos Finitos | 13 |
| 2.3.1. Discretização e Modelo de Malha | 13 |
| 2.3.2. Deslocamentos e Matriz de Rigidez | 14 |
| 2.3.3. Matriz de Rigidez Global, Condições de Contorno e Comportamento Mecânico | 15 |
| 2.4. Conceito Geral de Otimização | 15 |
| 2.5. Problema de Otimização Combinatória..... | 16 |
| 2.5.1. Complexidades Computacionais Envolvendo Problemas de Otimização Combinatória | 16 |
| 2.6. Métodos de Otimização Estrutural | 17 |
| 2.7. Otimização Topológica..... | 19 |
| 2.7.1. Formulação Geral do Problema de Otimização Topológica..... | 19 |
| 2.7.2. MOT em Estruturas Contínuas | 22 |
| 2.7.3. Material Isotrópico Sólido com Penalização (SIMP) | 23 |
| 2.8. Problemas Numéricos da Otimização Topológica | 25 |
| 2.8.1. Problema de Tabuleiro de Xadrez | 25 |
| 2.8.2. Problema da Dependência de Malha | 26 |
| 2.8.3. Problema de Mínimos Locais | 27 |
| 2.9. Contexto dos Problemas de Otimização Topológica..... | 28 |
| 2.10. Teoria de Placas | 29 |
| 2.10.1. Placas Finas | 29 |
| 2.10.2. Métodos de Solução para Placas Finas | 29 |
| 2.10.3. Placas Finas vs. Placas Espessas | 29 |
| 2.10.4. Teoria Clássica de Placas (Kirchhoff-Love)..... | 30 |
| 2.10.5. Teoria de Placas Espessas (Mindlin-Reissner) | 30 |
| 2.10.6. Métodos de Solução..... | 30 |
| 2.11. Integração Teórica e Prática na Engenharia Estrutural..... | 31 |
| 2.11.1. Prevenção de Falhas | 31 |
| 2.11.2. Análise e Design de Placas | 31 |
| 2.11.3. Ferramentas Avançadas de Análise | 31 |
| 2.12. Modos de Falha em Estruturas | 32 |
| 2.12.1. Falha por Tração | 32 |
| 2.12.2. Falha por Compressão | 32 |
| 2.12.3. Falha por Flexão | 32 |
| 2.12.4. Falha por Cisalhamento | 33 |
| 2.12.5. Falha por Torção..... | 33 |
| 2.12.6. Falha por Flambagem | 33 |
| 2.12.6.1. Falha por Flambagem Linear..... | 34 |
| 3. DESENVOLVIMENTO DO TRABALHO..... | 35 |
| 3.1. Formulação do Problema de Otimização Topológica..... | 35 |

| | | |
|-----------|---|-----------|
| 3.2. | Condições de Contorno | 36 |
| 3.3. | Restrições Aplicadas à Otimização Topológica | 38 |
| 3.4. | Propriedades do Material | 40 |
| 3.5. | Propriedades de Massa e Centro de Gravidade das Baterias | 40 |
| 3.6. | Restrições de Manufatura | 41 |
| 3.7. | Objetivo e Condições de Parada da Otimização..... | 41 |
| 3.8. | Ferramentas de Projeto, Otimização Topológica e Análise Estrutural..... | 41 |
| 3.9. | Modelo de Análise de Elementos Finitos | 42 |
| 3.10. | Procedimento de Análise | 44 |
| 3.10.1. | Procedimento de Otimização Topológica..... | 44 |
| 3.10.2. | Procedimento de Análise Estrutural | 44 |
| 3.10.2.1. | Critério de Dimensionamento | 45 |
| 4. | RESULTADOS E DISCUSSÕES | 47 |
| 4.1. | Resultados da Otimização Topológica | 47 |
| 4.1.1. | Comparação dos Resultados com Diferentes Condições de Parada..... | 47 |
| 4.1.2. | Modelamento CAD..... | 48 |
| 4.2. | Análise Estrutural | 48 |
| 4.2.1. | Análise de Resistência Estática em Termos de Carga Limite | 48 |
| 4.2.2. | Análise de Resistência Estática em Termos de Carga Última | 51 |
| 4.2.3. | Análise de Estabilidade (Flambagem) | 53 |
| 4.2.4. | Critério de Dimensionamento | 53 |
| 4.2.5. | Recomendações de Projeto | 54 |
| 4.3. | Variação de Massa ao Decorrer do Projeto | 55 |
| 5. | CONCLUSÃO..... | 57 |
| | REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS | 58 |

1. INTRODUÇÃO

A busca por soluções de otimização estrutural eficientes é uma constante. Desde o início, a engenharia almejou criar ferramentas para otimizar a resistência estrutural e minimizar a massa. Essa visão se desenvolveu através dos diferentes tipos de otimização disponíveis. A abordagem de Otimização Topológica (OT) desponta-se como um método promissor, porém, possui uma alta complexidade, cujos resultados só são satisfatórios com a definição de uma metodologia, parâmetros, recomendações e diretrizes, além de recursos computacionais condizentes.

O presente trabalho apresenta uma análise estrutural com ênfase em OT, uma técnica que tem como objetivo descobrir a melhor distribuição de material dentro de um domínio especificado em um projeto, onde a disposição de matéria varia em função do comportamento mecânico da estrutura, bem como a flexibilidade, frequências naturais, tensões, entre outros fatores (COUTINHO, 2006).

O Método de Otimização Topológica (MOT) foi introduzido por Bendsøe e Kikuchi (1988 apud STUMP, 2006), sendo fortemente fundamentado nas contribuições de vários pesquisadores, conforme destacado pelo próprio autor. No contexto deste trabalho, Bendsøe propõe uma abordagem para a otimização de *layouts*, abordando um problema de distribuição envolvendo dois materiais, sendo um deles caracterizado como vazio (buracos). O autor adota a parametrização das propriedades do material, empregando o conceito de microestruturas para essa finalidade. O uso de microestruturas no problema de projeto ótimo de estruturas já havia sido proposto nos trabalhos de Cheng e Olhoff (1981, 1982 apud STUMP, 2006).

Ao longo dos capítulos, a pesquisa partirá dos fundamentos teóricos da otimização estrutural, com foco em OT. Será abordado o conceito e as potenciais aplicações para projetos de engenharia. Por fim, será utilizado o suporte das baterias de um Veículo Aéreo não Tripulado (VANT), conhecido em inglês como *Unmanned Aerial Vehicle* (UAV), desenvolvido pela empresa Akaer Engenharia S.A. como objeto de estudo, a fim de realizar análises e simulações.

Portanto, este trabalho tem como objetivo principal a análise das diferentes abordagens relacionadas à OT e sua aplicabilidade no contexto do projeto de estruturas aeronáuticas. Os resultados alcançados neste estudo poderão contribuir para a elaboração de uma metodologia de projeto, no que tange a definição de parâmetros, bem como a formulação de recomendações e diretrizes. Deste modo, esta análise busca contribuir

significativamente para o avanço e aprimoramento das boas práticas de redução de massa aplicáveis à engenharia aeronáutica.

1.1. Objetivo Geral

O objetivo geral deste trabalho é verificar a aplicação da OT no contexto da concepção de peças destinadas a projetos aeronáuticos, com especial atenção para a redução de massa. Para isto, será analisado o suporte das baterias do veículo aéreo não tripulado denominado “A200” pela empresa Akaer Engenharia S.A. em um projeto de pesquisa e desenvolvimento fomentado pela FINEP (Financiadora de Estudos e Projetos).

1.2. Objetivos Específicos

Para a consecução do objetivo geral foram estabelecidos os objetivos específicos:

- Verificar o conceito de projeto e análise estrutural;
- Revisar conceitos do método de elementos finitos;
- Estudar os tipos de otimização estrutural;
- Analisar os métodos de otimização topológica;
- Investigar os problemas de otimização topológica abordados na literatura;
- Apontar as propriedades do material do suporte da bateria;
- Identificar as condições de contorno pertinentes;
- Gerar uma geometria do suporte da bateria a ser otimizada;
- Identificar as regiões do volume de projeto que devem ser mantidas;
- Realizar otimização topológica;
- Verificar as restrições de manufatura;
- Realizar análise estrutural para validação do modelo.

2. FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Neste capítulo busca-se definir o conceito geral de projeto e análise de estruturas. É feito uma revisão a respeito do método de elementos finitos, o conceito geral de otimização e os métodos de otimização estrutural. Por fim, analisa-se detalhadamente os métodos de OT.

2.1. Definição de Projeto Estrutural e Análise Estrutural

De acordo com Vanderplaates (1994), o projeto estrutural é a fase inicial em que se concebe e planeja a estrutura definindo requisitos de desempenho, carga de segurança, bem como a escolha de materiais adequados. O objetivo é criar uma estrutura que atenda aos requisitos enquanto otimiza o uso de materiais, minimizando a massa, o custo e outros fatores relevantes.

A análise estrutural é a etapa subsequente onde se realiza uma avaliação detalhada do que foi projetado com o auxílio de ferramentas de análise computacional, como a análise de elementos finitos, para simular e entender como a estrutura se comporta sob diferentes condições de carga, temperatura e pressão (VANDERPLAATES, 1994).

2.2. Tipos de Análises Estruturais

Ao abordar a análise de estruturas, é crucial classificá-la quanto à geometria, modelo de material e ações aplicadas. A formulação e aplicação do Método dos Elementos Finitos (MEF) dependem das simplificações associadas a cada tipo de problema. Destacam-se duas abordagens: análise dinâmica e estática. As ações sobre as estruturas são geralmente dinâmicas, considerando as forças de inércia associadas às acelerações a que os componentes estão sujeitos. No entanto, em situações em que as ações são aplicadas de forma suficientemente lenta, as forças de inércia podem ser negligenciadas, caracterizando uma análise estática (AZEVEDO, 2003).

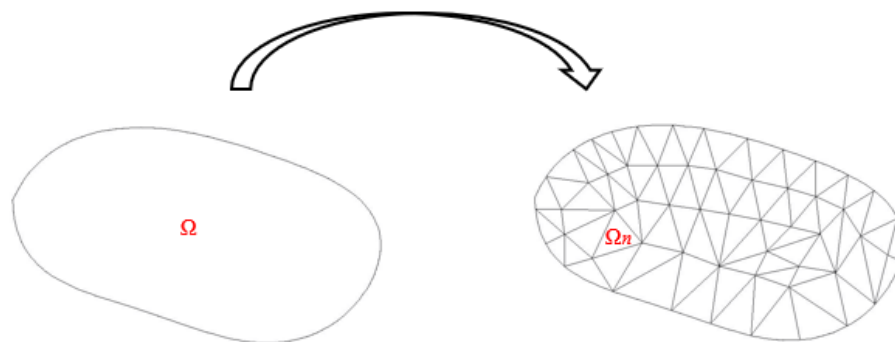
Outro aspecto relevante é a distinção entre análise não linear e linear. Segundo Azevedo (2003), na análise de uma estrutura sólida, é comum assumir que os deslocamentos causados pelas ações exteriores são muito pequenos em comparação com as dimensões da estrutura. Nessas circunstâncias, supõe-se que não há influência na distribuição de esforços e tensões devido à modificação da geometria da estrutura, sendo todo estudo realizado com base na geometria inicial indeformada. Quando essa hipótese não é considerada, a análise é chamada de não linear geométrica.

Além disso, é frequente assumir uma relação linear entre tensões e deformações no material da estrutura. Nos casos em que essa simplificação não é válida, é necessário recorrer a algoritmos específicos de análise não linear do material (AZEVEDO, 2003).

2.3. Método dos Elementos Finitos

Segundo Teixeira-Dias et al. (2009), o Método dos Elementos Finitos (MEF) é a modelagem de um problema genérico que envolve meios contínuos, por meio de análise de partes discretizadas permitindo conhecer ou obter uma descrição matemática do comportamento. Para facilitar ou até mesmo tornar possível a análise e solução do problema, o domínio Ω é dividido em subdomínios/elementos Ω_n , conforme exemplificado pela Figura 1, onde cada elemento apresenta seu próprio sistema de variáveis e equações, em suma, variáveis locais que levam a uma aproximação polinomial do problema, tendo como vantagem a discretização do domínio Ω por meio de funções simples.

Figura 1. Discretização do domínio Ω por elementos triangulares Ω_n .



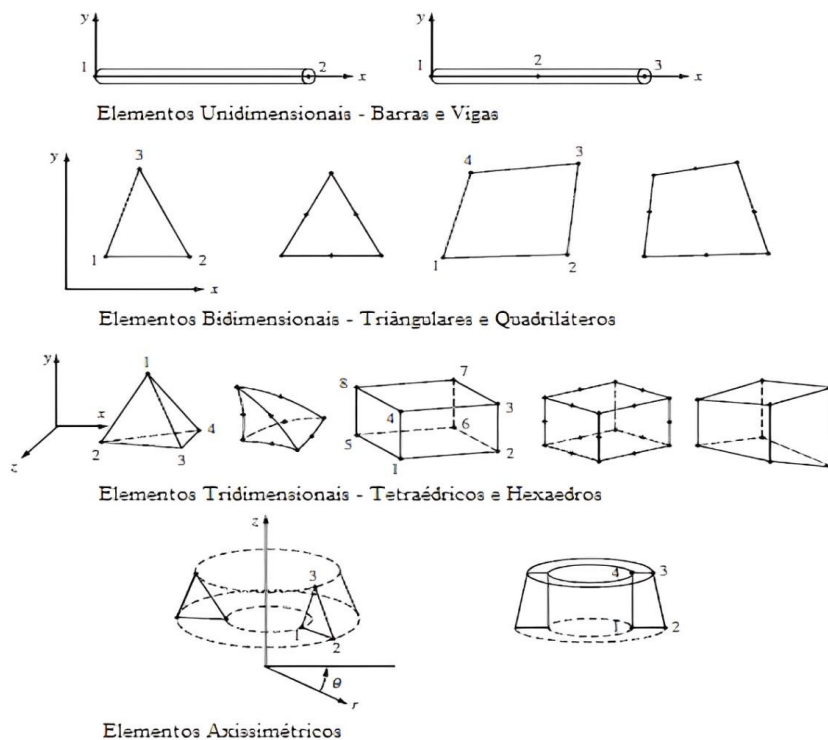
Fonte: Autores (2024).

2.3.1. Discretização e Modelo de Malha

A etapa básica do MEF é a discretização da geometria que, segundo Olinquevicz (2015), consiste na divisão da geometria de uma estrutura em um sistema de elementos finitos equivalente. Para melhor representar o comportamento físico da estrutura, é necessário definir adequadamente o tamanho do elemento, a fim de conseguir captar as variações devido a mudança de geometria sem comprometer excessivamente o tempo de processamento da análise. A subdivisão do corpo em elementos finitos é conhecida como malha.

A seleção do elemento finito apropriado para um problema específico depende da natureza desse problema e da experiência do engenheiro ou projetista. Os elementos finitos mais frequentemente empregados na prática estão ilustrados na Figura 2. Eles são caracterizados pelo número de nós, funções de deslocamento e dimensões associadas (OLINQUEVICZ, 2015).

Figura 2. Principais tipos de elementos finitos.



Fonte: Olinquevicz (2015).

2.3.2. Deslocamentos e Matriz de Rigidez

De acordo com Olinquevicz (2015), é essencial determinar o número de nós e os graus de liberdade do elemento, a fim de permitir a escolha adequada entre polinômios lineares, quadráticos ou cúbicos. Desse modo, é possível formular a função de deslocamentos, a qual usa os valores dos deslocamentos nos nós para calcular de forma aproximada os deslocamentos dentro do elemento.

Em seguida, procede-se ao desenvolvimento da matriz de rigidez e das equações dos elementos finitos. Essas equações relacionam as forças e os deslocamentos nos nós, obtidos por meio de um sistema de equilíbrio de forças, juntamente com a relação força/deformação. O resultado é mostrado na Equação 1 (OLINQUEVICZ, 2015):

$$\begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ \vdots \\ f_n \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & \cdots & k_{1n} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} & \cdots & k_{2n} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} & \cdots & k_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ k_{n1} & k_{n2} & k_{n3} & \cdots & k_{nn} \end{bmatrix} \times \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ \vdots \\ u_n \end{Bmatrix} \quad (1)$$

Equivalente a Equação 2:

$$\mathbf{f} = \mathbf{k}\mathbf{u} \quad (2)$$

Onde f define a vetor de força nos nós do elemento, k a matriz de rigidez do elemento e u é o vetor dos deslocamentos ou graus de liberdade do elemento (OLINQUEVICZ, 2015).

2.3.3. Matriz de Rigidez Global, Condições de Contorno e Comportamento Mecânico

Nesta etapa, as equações de equilíbrio nos pontos nodais de cada elemento, derivadas da Equação 1, são consolidadas em uma única equação de equilíbrio global no sistema de coordenadas global. A equação global de equilíbrio para a estrutura discretizada é apresentada na Equação 3 (OLINQUEVICZ, 2015).

$$\mathbf{F} = \mathbf{K}\mathbf{U} \quad (3)$$

Onde F é um vetor que representa as forças totais atuando nos nós, incluindo tanto as forças aplicadas como as reações, K é uma matriz simétrica que descreve a rigidez global do sistema, e U é um vetor que contém os deslocamentos ou graus de liberdade de todos os nós no sistema de coordenadas global (OLINQUEVICZ, 2015).

Portanto, para a construção da matriz de rigidez global, pode-se adotar a expansão seguida de superposição das matrizes de rigidez local ou pelo método da rigidez direta que posiciona os elementos nos graus de liberdade adequados. Após isso, define-se as condições de contorno do sistema e os deslocamentos prescritos. Em sequência, a partir dos deslocamentos resultantes das equações de equilíbrio é possível determinar as reações nos apoios e as tensões desenvolvidas (OLINQUEVICZ, 2015).

2.4. Conceito Geral de Otimização

Ao abordar o tema de otimização estrutural, faz-se necessário entender o conceito geral do termo “otimização”. Os métodos de otimização foram desenvolvidos para resolver problemas físicos e matemáticos envolvendo valores extremos de uma função de interesse (RIGO, 1999). Nesse sentido, é possível descrever os métodos de otimização em três aspectos importantes (FERRAZ, 2021):

- (a) O primeiro envolve a criação do algoritmo em si, que deve levar em consideração a estrutura do problema, as propriedades das soluções e outros fatores relevantes;
- (b) O segundo aspecto se concentra nas sequências de números geradas pelo algoritmo, com a principal preocupação sendo se essas sequências realmente convergem para uma solução do problema;
- (c) O terceiro ponto a ser avaliado é a rapidez com que essa sequência se aproxima da solução desejada; não é suficiente que ela apenas converja, mas também é importante que essa convergência ocorra em um período razoável.

Portanto, os algoritmos eficazes são aqueles que geram sequências que convergem rapidamente para uma solução. Logo, uma abordagem comum para desenvolver um algoritmo é selecionar, a partir de cada ponto alcançado, uma direção na qual avançar para o próximo passo (FERRAZ, 2021).

2.5. Problema de Otimização Combinatória

Nas últimas décadas, surgiram diversos problemas de grande relevância, tanto na esfera prática quanto teórica. Estes problemas estão voltados para a identificação do conjunto ótimo de parâmetros ou da configuração mais eficiente para alcançar uma solução desejada ótima (PAPADIMITRIOU E STEIGLITZ, 1998).

A abordagem fundamental para a resolução de problemas consiste na integração de das potenciais soluções, de maneira a atender às restrições predefinidas. A partir dessas opções, é selecionada aquela que proporciona a máxima qualidade em relação à função objetivo (CORDENONSI, 2008). Quando se depara com um problema de otimização combinatória, existe um conjunto finito de modelos, e busca-se encontrar aquele que contenha o valor considerado ótimo, isto é, a melhor opção possível em relação a alguma função objetivo. A capacidade de encontrar novas soluções sejam elas boas ou ótimas para o problema de otimização combinatória no mundo real pode, muitas das vezes, se relacionar em considerável economia de termos financeiros, de tempo ou recursos computacionais.

2.5.1. Complexidades Computacionais Envolvendo Problemas de Otimização Combinatória

Para Silva (2012), problemas de OT que envolvem variáveis discretas têm uma natureza combinatória, o que aumenta significativamente o custo computacional. Por isso, muitas vezes é preferível utilizar uma aproximação contínua para resolvê-los. No entanto, quando as variáveis discretas têm valores muito espaçados, essa aproximação pode não ser

confiável, pois pode se afastar muito da solução ótima e violar alguma restrição imposta no início do problema. Nessas situações, é necessário usar algoritmos específicos para lidar com essas variáveis.

O objetivo primordial na eficiente resolução de problemas de otimização combinatória consiste em obter, independentemente do método utilizado, resultados significativos dentro de um intervalo temporal considerado aceitável. Contudo, as complexidades associadas a esses problemas emergem quando o número de alternativas no espaço de busca é excessivamente elevado, tornando frequentemente inviável a enumeração de todas as soluções para um problema de otimização combinatória (BARBOSA, 2016).

Um problema pode-se ser definido de complexidade elevada se os recursos computacionais e o tempo necessário para resolvê-lo crescem exponencialmente de acordo com seu tamanho (COOK, 1971). De acordo com Goldbarg e Luna (2005), para se analisar a complexidade de um algoritmo torna-se relevante determinar os recursos que o algoritmo irá necessitar para realizar suas atividades, tal como a memória e tempo de processamento. De forma geral, um problema de otimização combinatória é considerado custosa justamente devido à sua demanda computacional, seja ela de processamento de dados (cálculos computacionais) ou de demanda gráfica (renderização 3D).

2.6. Métodos de Otimização Estrutural

A otimização estrutural é um processo numérico/matemático que visa a obtenção de uma configuração de estrutura ótima, seguindo alguma medida de desempenho pré-definida, como mínima massa, máxima rigidez, máxima carga de flambagem etc. As variáveis de projeto e o comportamento da estrutura definem as restrições aplicáveis, incluindo critérios como tensão de falha, frequência natural crítica e restrições de deslocamento, entre outros (LOPEZ, MIGUEL, 2013).

Ainda segundo Lopez e Miguel (2013), o conceito de estrutura abrange qualquer sistema cujo propósito seja a transmissão de esforços mecânicos, seja de natureza estática ou dinâmica. Nesse sentido, os principais objetivos da otimização estrutural são duplos: em primeiro lugar, busca-se encontrar a solução de menor custo viável no projeto de uma estrutura, garantindo que ela satisfaça de maneira adequada os seus estados limites, incluindo os estados de serviço e último. Em segundo lugar, procura-se minimizar ou, ao menos, reduzir significativamente a influência da experiência do projetista, uma vez que um engenheiro com uma extensa trajetória de pelo menos 10 anos de prática costuma conceber um projeto muito mais eficiente e ágil em comparação a um recém-formado. Neste contexto,

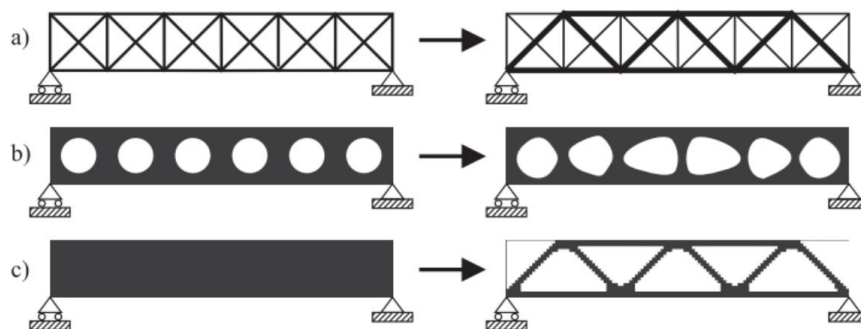
a otimização estrutural oferece um método sistemático para buscar a melhor solução de projeto, eliminando, assim, a necessidade de depender fortemente da experiência do projetista.

De acordo com Palma (2018), existem três diferentes abordagens aplicáveis ao processo de otimização estrutural: otimização paramétrica, otimização de forma e otimização topológica. No método de otimização paramétrica define-se inicialmente uma estrutura, onde é fixado as condições de carregamento e graus de liberdade. Como é mostrado na Figura 3(a), uma estrutura em treliça pode passar por diferentes processos de otimização, como a da área da seção transversal ou por coordenadas geométricas. Assim, essas variáveis podem ser otimizadas respeitando determinadas restrições impostas no problema, como tensões máximas e deslocamentos limites.

No método de otimização de forma, não há criação de mais regiões com vazios nas estruturas, e sim a otimização destas para que satisfaçam uma determinada função objetivo, por exemplo, maximização da rigidez, e conseqüentemente obtendo a forma ótima da estrutura. Desse modo, regiões que antes tinham furos circulares como são apresentados na Figura 3(b), passam a ter *splines*, por exemplo, onde os parâmetros desta curva constituem as variáveis de projeto (PALMA, 2018).

Por fim, a otimização topológica visa a distribuição ótima de material em um domínio estendido de projeto. A estrutura surge de forma natural no processo, por meio da definição da distribuição do material e das regiões vazias resultantes da ausência de material - Figura 3(c). Utiliza-se a OT na fase de concepção estrutural, onde não se conhece a topologia, ou seja, o posicionamento dos elementos mais resistentes (PALMA, 2018).

Figura 3. Solução de um problema por diferentes abordagens de otimização: a) otimização paramétrica; b) otimização de forma; c) otimização topológica.



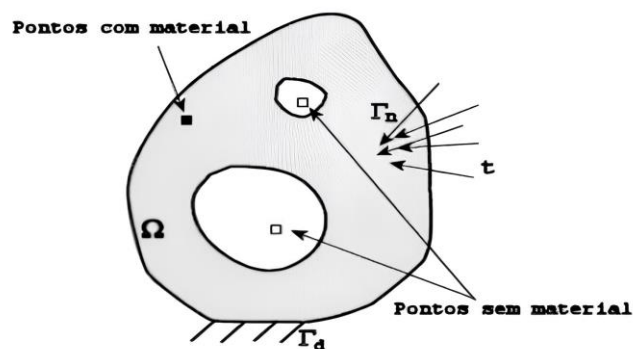
Fonte: Palma (2018).

2.7. Otimização Topológica

O principal objetivo da OT é encontrar a melhor distribuição de material dentro de um domínio Ω (SANT'ANNA, 2002). Para uma compreensão mais clara, domínio define a geometria do componente a ser otimizado topologicamente (MORISHITA, 2015). Esse conceito é representado na Figura 4, na qual busca-se encontrar a maneira mais eficaz de distribuir o material dentro do domínio Ω .

No contexto dos problemas de OT, as únicas quantidades conhecidas no problema são as cargas aplicadas, as possíveis condições de suporte, o volume da estrutura a ser construída e possivelmente algumas restrições adicionais de design, como a localização e o tamanho de furos prescritos ou áreas sólidas. Neste problema, são desconhecidos o tamanho físico, a forma e a conectividade da estrutura. Desse modo, a OT de estruturas sólidas envolve a determinação de características como o número, a localização e a forma de furos, bem como a conectividade do domínio (BENDSØE; SIGMUND, 2003).

Figura 4. Ilustração da questão de otimização topológica, onde se procura a distribuição mais eficiente de material dentro do domínio Ω .



Fonte: Sant'Anna (2002).

Toda OT deve respeitar determinadas restrições pré-estabelecidas (SIMONETTI et al., 2021). Estas restrições podem ser entendidas como toda condição de contorno pré-definida no anteprojeto de um componente, de modo a minimizar a função objetivo e cumprir com as restrições impostas (COUTINHO, 2006).

2.7.1. Formulação Geral do Problema de Otimização Topológica

Um problema de OT tem como base dois conceitos teóricos, sendo estes o domínio fixo estendido e o modelo de material (KIYONO, 2008).

O domínio fixo estendido (Ω) é o espaço que o algoritmo poderá modificar a geometria do componente. Suas limitações são as condições de contorno e os pontos de aplicação da força. Definido o domínio, este deverá ser discretizado utilizando o método de elementos finitos, para que seja possível a aplicação das condições de contorno (KIYONO, 2008).

A equação de modelo de material descreve a composição microscópica de dois ou mais materiais (podendo um deles ser o vazio), possibilitando a transição de uma condição de ausência de material (vazio) para a condição sólida em cada ponto do domínio. (KIYONO, 2008). Segundo Rozvany (2001 apud PALMA, 2018), este tipo de problema é da subclasse mais simples em OT, que trata de variáveis discretas (0-1) e possui 2^N soluções possíveis, onde N é o número de elementos finitos do problema discretizado.

A formulação geral para o problema de otimização topológica pode ser escrita conforme o Problema 1:

$$\begin{aligned} & \text{Minimizar } c(\Theta(x)) \\ & \text{Sujeito a } \bar{V} \leq V \\ & \bar{V} = \int_{\Omega} \Theta(x) d\Omega \end{aligned} \quad (1)$$

Onde $c(\Theta(x))$ é uma função arbitrária, $\Theta(x)$ é a fração de volume em cada ponto x do material e Ω_d é a região onde há presença de material, inserida num domínio Ω . Desse modo, \bar{V} representa o volume atual e V é o volume total permitido (PALMA, 2018).

Por conseguinte, a Equação 3 define o modelo material para materiais isotrópicos:

$$E = \Theta(x)E^0, \quad \Theta(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in \Omega_d \\ 0 & \text{se } x \in \Omega \setminus \Omega_d \end{cases} \quad (3)$$

Sendo E^0 o tensor constitutivo que representa um material elástico isotrópico a partir do qual a estrutura será construída, enquanto E é o tensor constitutivo da estrutura resultante, (PALMA, 2018), (KIYONO, 2008).

Segundo Bendsøe e Sigmund (2003), o desafio do projeto ótimo pode ser caracterizado como a busca pela melhor configuração do tensor constitutivo para um material isotrópico, sem modificar as propriedades reológicas do material. A forma ideal resultante é afetada pelas condições de contorno e pela quantidade de material empregado.

A abordagem mais comumente usada para resolver esse problema é substituir as variáveis inteiras por variáveis contínuas e depois introduzir alguma forma de penalidade que direcione a solução para valores discretos 0-1. O problema de *design* para o domínio fixo é então formulado como um problema de dimensionamento modificando a matriz de

rigidez de modo que dependa continuamente de uma função que é interpretada como uma densidade de material. Essa função é então a variável de *design*. O requisito é que a otimização resulte em *designs* compostos quase inteiramente de regiões de material ou sem material. Isso significa que valores intermediários dessa função de densidade artificial devem ser penalizados de maneira análoga a outras aproximações de otimização contínua de problemas 0-1 (BENDSØE, SIGMUND 2003).

De acordo com Palma (2018), O método essencialmente simula uma microestrutura capaz de assumir valores intermediários, estabelecendo o grau de relaxação do problema e permitindo o emprego de algoritmos de solução baseados em gradientes. A propriedade efetiva do material E em cada ponto do domínio é então definida em função da densidade do material $\rho(x)$, conforme mostrado no Problema 2 (PALMA, 2018):

$$\begin{aligned} &\text{Minimizar } c(\rho) \\ &\text{Sujeito a } \bar{V} \leq V \end{aligned} \quad (2)$$

De modo que a Equação 4 defina o tensor constitutivo em função da densidade do material (PALMA, 2018):

$$E = \rho(x)E^0, \quad 0 \leq \rho(x) \leq 1 \quad (4)$$

É importante observar que o tipo de problema é, do ponto de vista computacional, inerentemente de grande escala, tanto em termos de estado quanto de variáveis de projeto. Por esse motivo, os primeiros problemas tratados nesta área empregaram o tipo mais simples de formulação de problema de *design* em termos de objetivo e restrição, ou seja, projetar para a flexibilidade mínima (rigidez global máxima) sob restrições de recursos simples. Este é também conceptualmente um ponto de partida natural para esta exposição, pois sua solução reflete muitas das questões fundamentais no campo (BENDSØE; SIGMUND, 2003).

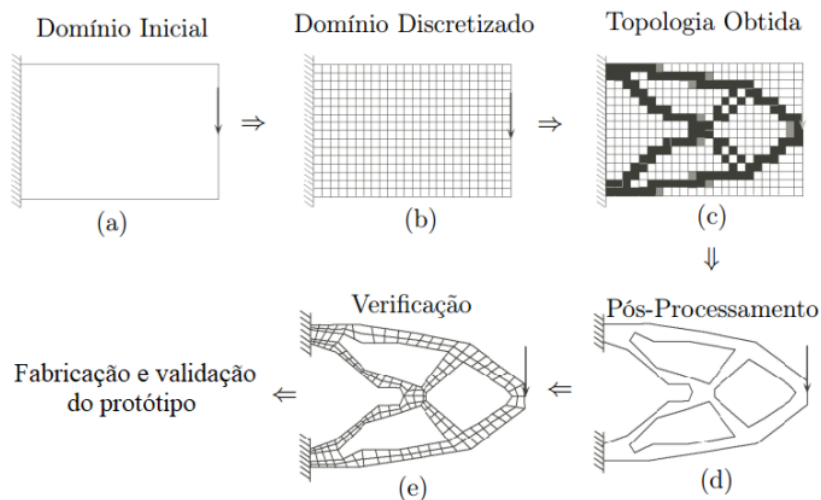
Desse modo, o problema do projeto para flexibilidade mínima geralmente é resolvido discretizando o domínio do projeto em elementos finitos e tratando a densidade artificial do material em cada elemento como uma variável de projeto, conforme ilustrado no Problema 3:

$$\begin{aligned} &\text{Minimizar } c(\rho) = f^T u \\ &\text{Sujeito a } K(\rho)u = f \\ &\quad \frac{v(\rho)}{v_0} \leq f \quad (3) \\ &\quad 0 < \rho_{min} \leq \rho_j \leq 1 \\ &\quad j = 1, \dots, N \end{aligned}$$

Onde c representa a flexibilidade a ser minimizada, u e f são os deslocamentos e as forças globais, respectivamente, K é a matriz de rigidez global. O volume de material e o volume do domínio estendido de projeto são, respectivamente, $V(\rho) = \sum_{j=1}^N \rho_j V_j$ e V_0 . O vetor das densidades de todos os elementos é representado por ρ , de modo que ρ_{min} é o valor mínimo permitido para a densidade, que serve para evitar problemas de condicionamento da matriz de rigidez. N é a quantidade de elementos utilizados para dividir o domínio do projeto em partes discretas. Esta formulação tem a desvantagem de produzir resultados com elementos que possuem densidades intermediárias (PALMA, 2018).

A Figura 5 apresenta o procedimento típico da OT em projeto estrutural. Ao discretizar o domínio de projeto é necessário aplicar métodos numéricos no processo de solução do problema de minimizar a flexibilidade, podendo ser aplicado em problemas de otimização estrutural contínuos para diversos tipos de função objetivo e restrições (PALMA, 2018).

Figura 5. Procedimento típico de projeto estrutural por otimização topológica.

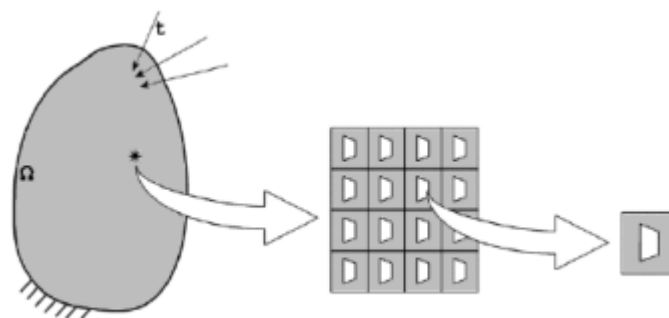


Fonte: Palma (2018).

2.7.2. MOT em Estruturas Contínuas

De acordo com Sant'Anna (2002), no âmbito das estruturas contínuas, o Método de Otimização Topológica (MOT) pode ser dividido em duas principais perspectivas. A primeira abordagem é a microscópica, que leva em consideração a presença de uma microestrutura porosa. Nessa perspectiva, a caracterização do material é definida com base na geometria e na densidade volumétrica da célula unitária representativa, conforme ilustrado na Figura 6.

Figura 6. Representação de uma microestrutura porosa.



Fonte: Sant'Anna (2002).

A segunda perspectiva é a macroscópica, que se caracteriza por um domínio fixo dividido em domínios menores utilizando o Método dos Elementos Finitos (MEF). Durante o processo de cálculo das reações, a malha permanece constante.

A otimização é direcionada para determinar quais partes da estrutura devem ou não ser alocadas com material. A distribuição de densidades é parametrizada, permitindo que cada ponto no domínio fixo varie de completa ausência de material, representada como $\rho=0$ e a presença completa de material, representada como $\rho=1$. Algoritmos que seguem essa abordagem procuram encontrar a configuração ideal de distribuição de material, com o objetivo de minimizar ou maximizar uma função de interesse, conforme ilustrado na Figura 5. Um exemplo de método que segue essa abordagem é o método SIMP (*Simple Isotropic Material with Penalization*) (SANT'ANNA, 2002).

A fim de oferecer uma solução para o problema de um projeto ótimo de OT, o uso de microestruturas nervuradas já havia sido previamente proposto por Cheng e Olhoff (1981, 1982 apud STUMP, 2006), com os estudos e pesquisas de otimização da espessura de placas, culminando posteriormente em diversos trabalhos de investigação com esta mesma problemática.

2.7.3. Material Isotrópico Sólido com Penalização (SIMP)

Com o objetivo de encontrar a melhor solução para um problema, o método SIMP propõe uma abordagem que envolve a alocação de material com a introdução de estruturas microscópicas artificiais. Nesse processo iterativo, a densidade artificial de material deixa de ter limitações físicas e se torna uma variável matemática usada exclusivamente para

alcançar a solução desejada. A Equação 9 do método SIMP foi proposta inicialmente por Bendsoe em 1989, incrementada por Andreassen et al. (2010) e mencionada por Junior (2023).

$$E_k(x_k) = E_{min} + x_k^n(E_0 - E_{min}), x_k \in [0,1] \quad (9)$$

Onde:

E_k = Módulo de Young do elemento;

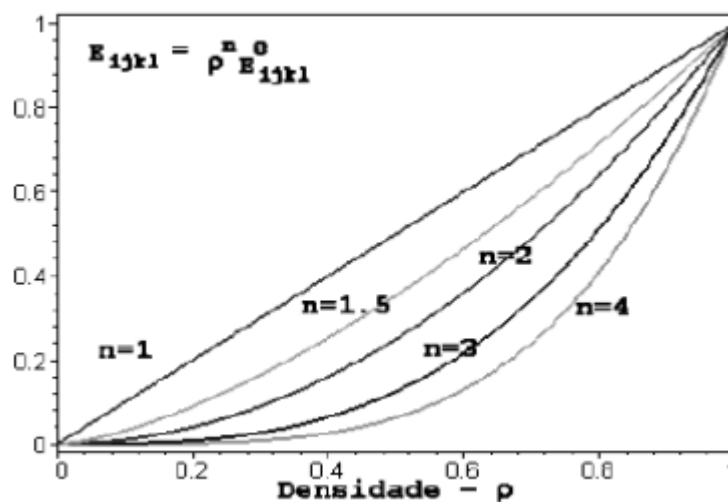
E_0 = Módulo de Young do material;

E_{min} = Valor mínimo do módulo de Young (usado para evitar singularidade na matriz de rigidez);

η = Expoente de penalidade.

Considerando que a densidade é expressa numericamente em uma faixa de 0 a 1, e que se busca uma solução discreta, ou seja, determinar se há ou não material em um elemento, os elementos com valores de densidade próximos a zero são sujeitos a penalizações de potência e são reavaliados como vazios. A Figura 7 ilustra a influência de diferentes valores de expoente de penalização na função do módulo de Young.

Figura 7. Funções exponenciais utilizadas para aproximar a função densidade artificial.



Fonte: Sant'Anna (2002).

Para Sant'Anna (2002), o maior problema associado ao SIMP está na formulação da densidade artificial, pois como mostra a Figura 7, para qualquer expoente maior que 1 a função se torna não convexa.

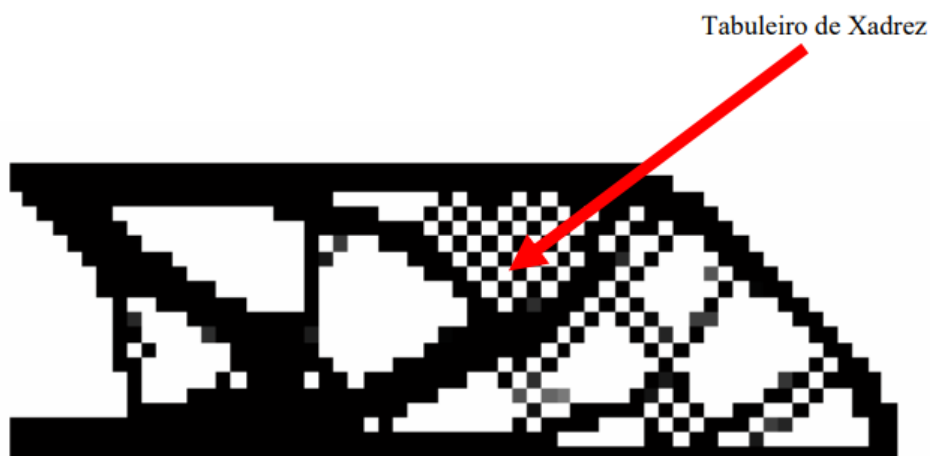
2.8. Problemas Numéricos da Otimização Topológica

Conforme os estudos sobre OT progrediram e se estabeleceram, várias áreas de pesquisa e aplicações se desenvolveram. Uma parcela significativa da comunidade científica concentrou seus esforços na análise de questões relacionadas à formulação da OT e na aplicação dela a problemas de engenharia. Cardoso e Fonseca (1999), Haber et al. (1996), Pousen (2002), Sigmund e Peterson (1998), Stolpe e Svanberg (2001) e Zhou et al. (2001) e são os principais autores a contribuir com discussão dos problemas de instabilidade numérica, como por exemplo, tabuleiro de xadrez, dependência de malha e o problema dos mínimos locais.

2.8.1. Problema de Tabuleiro de Xadrez

Devido a sua formulação na busca de uma solução ótima, o resultado se apresenta com espaços vazios e com material que se alternam e se assemelham a um tabuleiro de xadrez, sendo assim conhecido na literatura como “*checkerboard*” (PORTO, 2006). A Figura 8 abaixo, apresenta um exemplo deste problema.

Figura 8. Problema de tabuleiro de xadrez em um modelo de otimização topológica.



Fonte: Porto (2006).

Embora tenham sido realizados diversos estudos sobre o tema, ainda não existe um acordo unânime na comunidade científica acerca da explicação desse fenômeno. No entanto, duas abordagens apresentadas por Diaz e Sigmund (1995) são amplamente reconhecidas e aceitas no meio acadêmico.

A primeira teoria argumenta que a instabilidade surge devido às simplificações numéricas empregadas no Método de Elementos Finitos. Isso ocorre porque a configuração de um tabuleiro de xadrez apresenta uma maior rigidez quando comparada a uma configuração homogênea, considerando aspectos como deformação de cisalhamento e volume constante. Bendsøe e Sigmund (2003) também endossam essa abordagem e sugerem a utilização de funções de interpolação bi lineares como técnica para superar esse problema. Por exemplo, optar por elementos de alta ordem (com 8 ou 9 nós) em vez de 4 nós em elementos quadriláteros e 3 nós em elementos triangulares podem ajudar a simular de forma mais precisa o campo de deslocamento, o que, por sua vez, pode reduzir a ocorrência dessa instabilidade.

A segunda perspectiva, apresentada por Jog e Haber (1996), emprega a teoria dos elementos finitos mistos, considerando campos de deslocamentos e densidades. Esse enfoque se assemelha ao problema de Stokes, que trata da distribuição de pressões em situações de escoamento de fluidos com dois campos físicos distintos: velocidades e pressões. Esse conceito pode ser explorado com mais detalhes no trabalho de Oden et al. (1982).

2.8.2. Problema da Dependência de Malha

Quando se realiza uma discretização de um domínio contínuo, o espaço das soluções se torna finitamente dimensional. Isso significa que a cada nova discretização, é possível encontrar uma solução mais refinada, como explicado por Sant'Anna (2002). Ao utilizar uma malha mais refinada, é natural esperar que se obtenham resultados superiores na OT. No entanto, à medida que aumentamos a granularidade da discretização, observamos que a topologia se modifica, levando ao surgimento de um maior número de "buracos" e de membros na estrutura, resultando em um resultado qualitativamente distinto em comparação a uma malha mais ampla, conforme ilustrado na Figura 9.

Figura 9. Dependência da malha no problema de OT com restrição de tensão Von Mises: (a) malha com 3840 elementos triangulares (b) malha com 19200 elementos triangulares.



Fonte: Sant'Anna (2002).

2.8.3. Problema de Mínimos Locais

É caracterizado ao se utilizar diferentes parâmetros iniciais no algoritmo de otimização, obtém-se diferentes soluções para a mesma discretização do problema devido a não-convexidade, pois a convergência dos algoritmos funciona para programação convexa e para a não convexa é apenas garantido a convergência dos pontos estacionários que não necessariamente são mínimos globais. Portanto, entende-se que os algoritmos de otimização global são incapazes de lidar com grande número de variáveis do projeto.

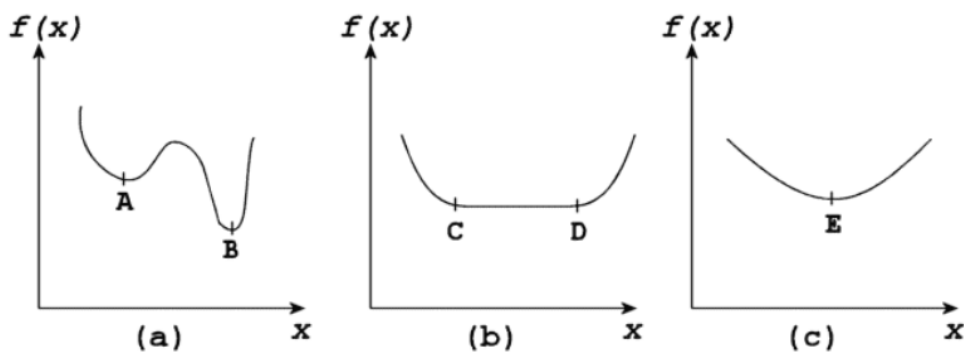
De acordo com Sigmund e Petersson (1998), percebe-se que as abordagens utilizadas para mitigar os problemas relacionados ao padrão de tabuleiro de xadrez e à dependência da malha, mencionados anteriormente, têm a tendência de transformar o sistema em um problema convexo. Isso permite que, sem a necessidade de modificar os parâmetros, a topologia final seja reproduzida de forma consistente.

Assim, o desafio fundamental na OT reside na suscetibilidade do resultado a pequenas flutuações nos parâmetros de entrada, como o número de elementos, a configuração inicial, o alcance de exclusão e a taxa de evolução. Devido à não convexidade das funções e dos funcionais presentes nos problemas de OT, devido à sua natureza não linear tanto na função objetivo quanto nas restrições incorporadas, é possível que uma multiplicidade de mínimos locais seja obtida (SANT'ANNA, 2002).

A Figura 10 a seguir ilustra três tipos de funções distintas em relação à sua convexidade. Na Figura 10(a), é apresentada uma função não-convexa, onde as regiões A e B destacam duas topologias diferentes da função. Isso significa que a função não segue a propriedade de convexidade, pois existem pontos onde a linha que conecta dois pontos na função está fora da própria função. Na Figura 10(b), vemos uma função não estritamente

convexa, o que implica que há um valor mínimo representado por C e D, mas esse valor mínimo corresponde a vários conjuntos distintos de valores para a variável de projeto x . Isso sugere que a função não é estritamente convexa, pois a linha entre dois pontos na função pode cruzar abaixo da função em alguns intervalos, permitindo a existência de múltiplos valores mínimos. Por fim, na Figura 10(c), temos uma função convexa com unicidade de solução, representada por E. Isso significa que a função possui a propriedade de convexidade, onde a linha que conecta dois pontos na função está sempre acima ou na própria função, garantindo assim a existência de uma única solução mínima para a função.

Figura 10. (a) função não-convexa, onde A e B apresentam duas topologias diferentes; (b) função não estritamente convexa, ou seja, existe um valor mínimo (C e D) que correspondem a vários conjuntos distintos de valores para a variável de projeto x ; (c) função convexa com unicidade de solução (E).



Fonte: Sant'Anna (2002).

2.9. Contexto dos Problemas de Otimização Topológica

Nos contextos de otimização de problemas de projetos topológicos, é essencial notar que a maioria desses problemas é caracterizada pela não convexidade, o que resulta na presença de uma multiplicidade de mínimos locais. A natureza não convexa do problema introduz a possibilidade de identificar diversos mínimos locais, bem como diferentes soluções quando se aplicam diferentes estimativas iniciais para as variáveis e parâmetros variados em algoritmos de otimização. Esse fenômeno ocorre porque os métodos de convergência de algoritmos são geralmente estabelecidos com base na programação convexa, o que significa que, em problemas não convexos, a garantia se limita à convergência para pontos estacionários, que não necessariamente correspondem aos mínimos globais (COUTINHO, 2006).

Segundo Morishita (2015), para a obtenção de resultados satisfatórios existem dois principais pontos chave a serem definidos com cuidado:

- 1- É fundamental evitar que as restrições sejam excessivamente rigorosas, uma vez que isso pode resultar na obtenção de resultados que não podem ser efetivamente alcançados;
- 2- É necessário garantir que a discretização da malha seja refinada de maneira apropriada, ou seja, o tamanho dos elementos finitos deve ser escolhido de forma a proporcionar resultados satisfatórios, sem, no entanto, exceder os recursos disponíveis.

2.10. Teoria de Placas

A teoria de placas é uma área fundamental na engenharia estrutural, essencial para a análise e o design de elementos planos, como lajes e painéis. De acordo com Cavalcanti (2014), este estudo aborda a distinção entre placas finas e espessas, bem como as teorias clássicas de Kirchhoff-Love e Mindlin-Reissner.

2.10.1. Placas Finas

A teoria de placa fina assume que a espessura da placa é muito pequena em comparação com as outras dimensões, tornando as tensões normais à superfície média desprezíveis. Essa simplificação permite a análise de placas finas utilizando equações diferenciais bidimensionais, o que simplifica significativamente o processo de análise estrutural (CAVALCANTI, 2014).

2.10.2. Métodos de Solução para Placas Finas

A solução das equações governantes na teoria de placa fina pode ser realizada por métodos analíticos e numéricos. Métodos analíticos, como a série de Fourier, são úteis em casos com geometrias e condições de contorno simples, fornecendo soluções exatas para problemas ideais. No entanto, em situações mais complexas, como geometrias irregulares ou condições de contorno variadas, o Método dos Elementos Finitos (MEF) é preferido devido à sua versatilidade e precisão. O MEF permite a modelagem detalhada de placas finas sob uma ampla gama de condições, possibilitando uma análise precisa do comportamento estrutural (CAVALCANTI, 2014).

2.10.3. Placas Finas vs. Placas Espessas

A distinção entre placas finas e espessas é um ponto crucial na análise estrutural. Placas finas assumem que as tensões normais à superfície média são desprezíveis, simplificando a análise e sendo aplicáveis na maioria dos casos práticos. Esta simplificação

é válida para placas onde a espessura é pequena em comparação com outras dimensões, permitindo a utilização de métodos analíticos mais simples. Por outro lado, placas espessas requerem uma análise mais complexa que leva em consideração as tensões normais, sendo mais adequada para situações onde a espessura do material é significativa. Este nível de detalhamento é essencial para a análise precisa de placas espessas, onde as tensões através da espessura influenciam o comportamento estrutural (CAVALCANTI, 2014).

2.10.4. Teoria Clássica de Placas (Kirchhoff-Love)

A teoria clássica de placas, também conhecida como teoria de Kirchhoff-Love, é amplamente utilizada para a análise de placas finas. Esta teoria assume que as seções transversais permanecem planas e normais à superfície média após a deformação, simplificando a formulação das equações governantes. A teoria de Kirchhoff-Love é adequada para a análise de lajes de concreto e painéis metálicos submetidos a cargas uniformes. Esta simplificação permite a solução analítica de muitos problemas práticos, facilitando o design e a avaliação de estruturas planas comuns na engenharia civil (CAVALCANTI, 2014).

2.10.5. Teoria de Placas Espessas (Mindlin-Reissner)

Para a análise de placas espessas, a teoria de Mindlin-Reissner é mais adequada, pois considera o efeito de cisalhamento transversal. Este ajuste é necessário para fornecer uma descrição mais precisa do comportamento de placas sob cargas elevadas ou em casos onde a espessura não pode ser desprezada. A teoria de Mindlin-Reissner é aplicada em situações como a análise de fundações de lajes espessas e placas de materiais compostos, onde a distribuição de tensões através da espessura é relevante. Esta teoria é essencial para garantir a precisão na análise de estruturas onde o cisalhamento transversal não pode ser ignorado (CAVALCANTI, 2014).

2.10.6. Métodos de Solução

A solução das equações diferenciais governantes na teoria de placas pode ser realizada por métodos analíticos e numéricos. Métodos analíticos, como a série de Fourier, são adequados para problemas com geometria e condições de contorno simples. Esses métodos permitem uma solução exata das equações diferenciais, fornecendo insights valiosos sobre o comportamento estrutural em casos ideais. Em contrapartida, o Método dos Elementos Finitos (MEF) é preferido para problemas complexos devido à sua versatilidade e precisão. O MEF permite a modelagem detalhada de geometrias irregulares e condições

de contorno variadas, sendo amplamente utilizado em software de análise estrutural. A aplicação do MEF é crucial para a resolução de problemas práticos onde a complexidade das geometrias e das condições de contorno impede a utilização de métodos analíticos (CAVALCANTI, 2014).

2.11. Integração Teórica e Prática na Engenharia Estrutural

A integração dos conhecimentos sobre modos de falha em estruturas e a teoria de placas é essencial para a prática da engenharia estrutural. A compreensão detalhada dessas áreas permite que engenheiros prevejam e mitiguem potenciais falhas, desenvolvendo estruturas que não apenas atendam aos requisitos funcionais, mas também ofereçam segurança e durabilidade ao longo do tempo (CAVALCANTI, 2014).

2.11.1. Prevenção de Falhas

A prevenção de falhas estruturais começa com a identificação e análise dos modos de falha potenciais. Ao compreender as causas e os mecanismos de falha, os engenheiros podem implementar medidas preventivas eficazes, como a seleção de materiais apropriados, o design otimizado de seções transversais e a utilização de técnicas avançadas de construção. Esta abordagem proativa é essencial para garantir a integridade estrutural e a segurança das construções (CAVALCANTI, 2014).

2.11.2. Análise e Design de Placas

Ainda de acordo com Cavalcanti (2014), a teoria de placas fornece uma base sólida para a análise e o design de elementos planos. A aplicação das teorias de Kirchhoff-Love e Mindlin-Reissner, junto com métodos de solução como o MEF, permite aos engenheiros modelar com precisão o comportamento de placas sob diversas condições de carga. Esta capacidade de análise detalhada é crucial para o desenvolvimento de projetos robustos e eficientes, que atendam aos requisitos estruturais e de desempenho.

2.11.3. Ferramentas Avançadas de Análise

A utilização de ferramentas avançadas de análise, como o MEF, é fundamental para a resolução de problemas complexos de engenharia. O MEF permite a modelagem precisa de geometrias complexas e a consideração de uma ampla gama de condições de contorno, proporcionando uma análise detalhada e precisa. A aplicação dessas ferramentas melhora significativamente a capacidade dos engenheiros de prever o comportamento estrutural e de desenvolver soluções inovadoras para desafios complexos (CAVALCANTI, 2014).

2.12. Modos de Falha em Estruturas

Os modos de falha em estruturas são fenômenos críticos que determinam a segurança e a integridade das construções. A compreensão desses modos é essencial para prevenir desastres e otimizar o desempenho estrutural. De acordo com o conteúdo apresentado no Capítulo 2 do livro de Rosa (2002), é possível examinar os principais modos de falha: tração, compressão, flexão, cisalhamento e torção.

2.12.1. Falha por Tração

A falha por tração ocorre quando um material é submetido a forças de alongamento que superam sua capacidade de resistência. Esta falha é prevalente em materiais como aço e concreto, especialmente em elementos como cabos de suspensão em pontes e barras de reforço em concreto armado. A resistência à tração é um parâmetro vital que determina a capacidade de um material de suportar cargas de alongamento sem romper. Rosa (2002) enfatiza a importância de selecionar materiais com alta resistência à tração para aplicações críticas, prevenindo rupturas catastróficas que podem comprometer a segurança estrutural.

2.12.2. Falha por Compressão

A falha por compressão é caracterizada pelo esmagamento de materiais sob forças compressivas. Este tipo de falha é particularmente crítico em pilares e colunas, onde a estabilidade é essencial. Um fenômeno comum associado à falha por compressão é a flambagem, que ocorre quando um componente estrutural se deforma lateralmente sob uma carga compressiva. Para evitar a falha por flambagem, é crucial calcular a carga crítica de flambagem e garantir que a estrutura tenha rigidez suficiente. A utilização de seções transversais otimizadas e a implementação de reforços adequados são estratégias eficazes para prevenir falhas por compressão (ROSA, 2002).

2.12.3. Falha por Flexão

A falha por flexão ocorre em vigas e outros elementos horizontais sujeitos a cargas transversais. O momento fletor gera tensões de tração e compressão ao longo da seção transversal do material. A resistência à flexão de um componente depende da sua geometria e do material utilizado. Rosa (2002) ainda destaca a importância do cálculo preciso do momento de inércia da seção e da distribuição de tensões, que são fundamentais para evitar

falhas por flexão. A utilização de materiais com alta resistência à flexão e o design adequado da seção transversal contribuem para a integridade e a durabilidade das estruturas.

2.12.4. Falha por Cisalhamento

A falha por cisalhamento ocorre quando forças atuam paralelamente à seção transversal do material, provocando um deslizamento entre as camadas internas. Este tipo de falha é especialmente crítico em junções e conexões estruturais, onde a integridade das interfaces deve ser garantida. As forças de cisalhamento são comuns em vigas sujeitas a cargas concentradas e em elementos de ligação, como parafusos e soldas. Rosa (2002) salienta a importância de projetar conexões com resistência adequada ao cisalhamento para evitar deslizamentos internos que poderiam comprometer a estabilidade estrutural.

2.12.5. Falha por Torção

A falha por torção ocorre em elementos sujeitos a torques ou forças que causam rotação em torno do eixo longitudinal. Este tipo de falha é comum em componentes como eixos de transmissão e vigas sujeitas a cargas rotacionais. A resistência ao torcimento é um fator crítico, pois a aplicação de torque gera tensões de cisalhamento no material. A análise da falha por torção envolve o cálculo das tensões de cisalhamento e a avaliação da resistência do material à torção. Rosa (2002) enfatiza a necessidade de utilizar materiais com alta resistência à torção e de projetar seções transversais que minimizem as tensões de cisalhamento para evitar falhas estruturais.

2.12.6. Falha por Flambagem

De acordo com Timoshenko e Gere (1963), a análise de flambagem em estruturas descreve-se como uma técnica utilizada para determinar a carga crítica na qual a estrutura perde sua estabilidade e sofre deformações laterais significativas. No contexto de uma análise utilizando um software de análise estrutural, o coeficiente de carga crítica é um valor crucial. Timoshenko e Gere (1963), ainda destaca sobre o Coeficiente de Carga Crítica (λ), este coeficiente é um fator de multiplicação que indica a proporção entre a carga de flambagem crítica (a carga máxima que a estrutura pode suportar antes de flambar) e a carga aplicada, onde:

(a) $\lambda > 1$: A estrutura é considerada estável sob as cargas aplicadas, pois a carga crítica de flambagem é maior do que a carga aplicada. Isso significa que a estrutura pode suportar as cargas sem flambar;

- (b) $\lambda = 1$: A estrutura está no limiar da estabilidade. A carga aplicada é igual à carga crítica de flambagem, indicando que qualquer aumento na carga pode causar flambagem;
- (c) $\lambda < 1$: A estrutura é considerada instável sob as cargas aplicadas, pois a carga crítica de flambagem é menor do que a carga aplicada. Isso significa que a estrutura flambear-se-á sob as cargas atuais.
- a. Portanto, se em uma análise o coeficiente de carga crítica for maior que 1, a estrutura de um componente é considerada estável e não suscetível à flambagem sob as cargas compressivas aplicadas. Esta abordagem é uma prática comumente adotada em análises de estabilidade estrutural.

2.12.6.1. Falha por Flambagem Linear

Segundo Cook et al. (2002), a flambagem linear define-se como a instabilidade estrutural que ocorre quando uma estrutura comprimida, como por exemplo uma coluna, atinge uma carga crítica, resultando em uma deflexão lateral significativa sem um aumento adicional da carga aplicada. Em outras palavras, é o ponto no qual uma estrutura inicialmente reta se deforma lateralmente de forma abrupta sob compressão axial, indicando uma falha potencial. Cook et al. (2002) ainda definem a relação entre a carga aplicada, a carga crítica de flambagem e o autovalor (valor característico associado a um sistema de equações que governam a estabilidade da estrutura sob compressão) através da seguinte equação 10:

$$P_{\text{Crítico de Flambagem}} = \lambda * P_{\text{Aplicado}} \quad (10)$$

Onde:

$P_{\text{Crítico de Flambagem}}$ = É a carga crítica de flambagem;

λ = É o autovalor (coeficiente de carga crítica);

P_{Aplicado} = Refere-se à carga aplicada na estrutura.

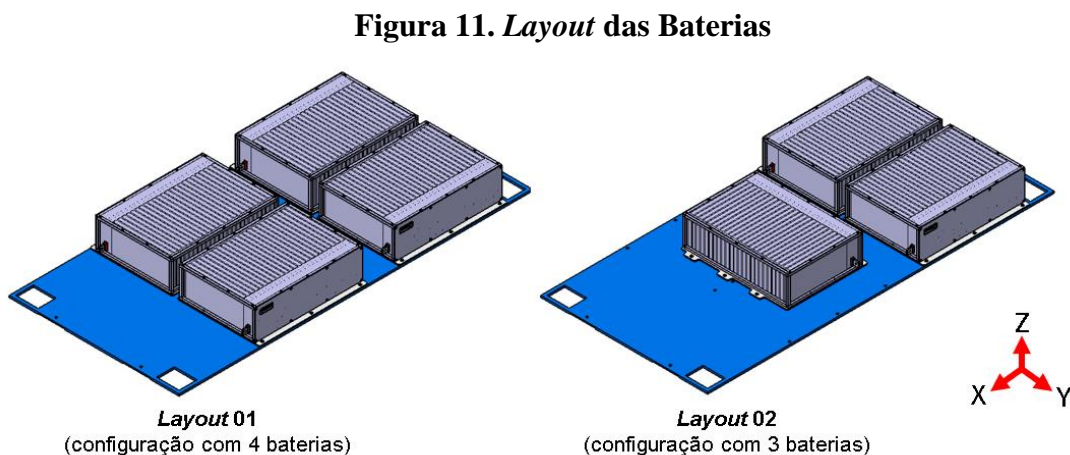
3. DESENVOLVIMENTO DO TRABALHO

Este capítulo apresenta o desenvolvimento e as metodologias de análise de OT do suporte das baterias do veículo aéreo não tripulado “AKR A200”. Os resultados serão utilizados no projeto de pesquisa e desenvolvimento executado pela Akaer Engenharia S.A., com financiamento da FINEP (Financiadora de Estudos e Projetos). A otimização deste componente é crucial para melhorar a eficiência, reduzir a massa e aumentar a segurança do sistema de propulsão da aeronave.

3.1. Formulação do Problema de Otimização Topológica

Como primeiro estágio do projeto A200, foi definida uma aeronave com Peso Máximo de Decolagem (PMD) limitado a 200 kg. Após estabelecer o plano de voo, determinou-se o consumo energético dos sistemas da aeronave e as baterias necessárias. A equipe da Akaer Engenharia S.A. identificou em análises preliminares a necessidade de quatro baterias, cada uma com massa de 12,5 kg. Cada bateria possui seis pontos de fixação na placa suporte metálica, totalizando 24 pontos de fixação na configuração de quatro baterias.

Devido à significativa massa das baterias em relação ao PMD, é essencial projetar um suporte com a menor massa possível, mantendo as características estruturais necessárias para sustentar o conjunto de baterias. Para isso, propõe-se aplicar técnicas de OT. Além disso, a placa suporte deve ser intercambiável para acomodar *layouts* de três ou quatro baterias, conforme mostrado na Figura 11, uma vez que os cálculos de performance do drone ainda não foram finalizados. Portanto, a placa deve ter todos os furos necessários para instalar ambos os *layouts*, totalizando 30 furos.



Fonte: Autores (2024).

O suporte deve ter dois rebaixos para servir como trilho e apoio nos perfis ômega da estrutura do drone. O rebaixo será igual à espessura da placa menos 2 mm. Propõe-se fixar o suporte na estrutura do drone por quatro parafusos, garantindo a estabilidade durante pouso, decolagem e manobras de voo. Além disso, é necessário projetar alças de manuseio para permitir a colocação e retirada das baterias no drone.

A montagem e fixação das baterias no suporte é feita em solo, fora do drone. O comprimento e a largura do suporte são *inputs* da equipe de projeto de estruturas da Akaer Engenharia S.A. para a OT, considerando as dimensões do drone e a provisão de instalação de componentes eletrônicos de massa desprezível, caso sejam necessárias modificações no projeto. Por esse motivo, a disposição das baterias, mesmo no *layout* de quatro baterias, não é simétrica em relação ao plano YZ.

3.2. Condições de Contorno

O problema de otimização deve considerar dois cenários de condição de contorno. Esses cenários são essenciais para garantir que a estrutura do suporte seja robusta e segura em todas as fases de operação e uso. A análise abrangente desses cenários permite avaliar a integridade estrutural sob diferentes condições, assegurando a funcionalidade e a segurança do suporte em situações variadas.

No primeiro cenário, considera-se a gravidade atuando nas baterias posicionadas sobre a placa com uma carga limite de 1g, em duas situações distintas: com o suporte parafusado e apoiado sobre perfis ômega ou quando o suporte está sendo carregado em solo e apoiado nas extremidades. A placa apoiada apenas nas extremidades é a condição de apoio mais crítica, devido à máxima deflexão e esforços de flexão. Desse modo, esta situação é utilizada para performar as otimizações e análises estruturais do primeiro cenário. A Tabela 1 detalha as condições de contorno referentes ao primeiro cenário.

Tabela 1. Condições de Contorno – Primeiro Cenário.

| Direção e Magnitude da carga | |
|-------------------------------------|---|
| DOWN (Z-) | 1g |
| Condições de Apoio | |
| Situação 1 | Suporte parafusado e apoiado sobre o perfil ômega na aeronave |
| Situação 2 | Suporte carregado em solo, apoiado apenas nas extremidades |

Fonte: Autores (2024).

No segundo cenário, considera-se a carga limite multiplicada por fatores de segurança prescritos. Esse caso de carga é especialmente crítico, pois simula condições adversas que podem ocorrer durante a operação do drone. A Tabela 2 detalha as condições de contorno do segundo cenário.

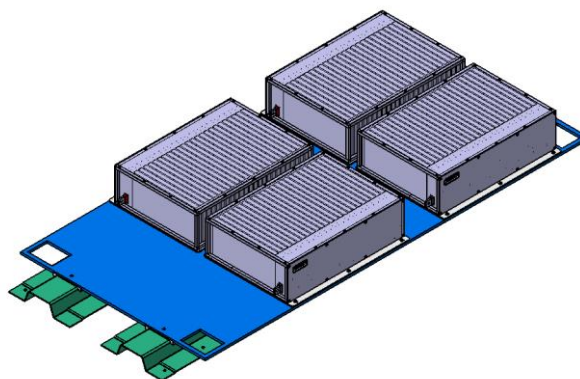
Tabela 2. Condições de Contorno – Segundo Cenário.

| Direção e Magnitude da carga | |
|-------------------------------------|---|
| FWD (X-) | 4g |
| AFT (X+) | 1,5g |
| UP (Z+) | 1,5g |
| DOWN (Z-) | 3,8g |
| RIGHT (Y+) | 1,5g |
| LEFT (Y-) | 1,5g |
| Condições de Apoio | |
| Situação 1 | Suporte parafusado e apoiado sobre o perfil ômega na aeronave |

Fonte: Adaptado de RBAC 23.305 (2013).

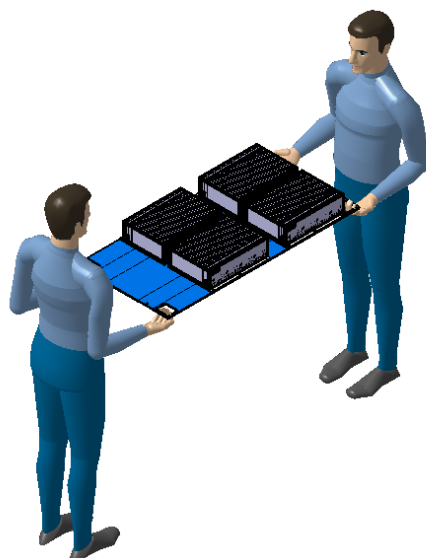
Por fim, a Figura 12 mostra o suporte de baterias com o *layout* 01 parafusado e apoiado sobre perfis ômega de material compósito, enquanto a Figura 13 destaca as alças de manuseio para operação em solo.

Figura 12. Suporte de Baterias Parafusado e Apoiado em Perfis Ômega



Fonte: Autores (2024).

Figura 13. Suporte de Baterias Apoiado nas Extremidades pelas Alças



Fonte: Autores (2024).

Para a OT, não é considerado o apoio no perfil ômega na aeronave. O motivo para essa escolha é disponibilizar um domínio de projeto de maior volume a ser otimizado, permitindo assim uma maior liberdade ao algoritmo de otimização para gerar um caminho de carga ótimo. Além disso, é considerado apenas o *layout* de 4 baterias, incluindo suas respectivas furações. O motivo para essa decisão é simplificar as condições de contorno e otimizar considerando o cenário mais crítico de 4 baterias, tendo em vista que o outro *layout* de 3 baterias é menos exigente estruturalmente.

3.3. Restrições Aplicadas à Otimização Topológica

Para conduzir a OT de forma eficaz, é necessário definir claramente duas regiões dentro do modelo estrutural: primeira é pertencente ao domínio de projeto, ao qual será otimizado; a segunda é uma restrição que deve ser mantida durante o processo de otimização.

O domínio de projeto é a região do modelo estrutural que pode ser otimizada. Dentro dos limites estabelecidos pelos pontos de fixação e outras restrições, o algoritmo de otimização irá redistribuir o material da placa para criar uma estrutura interna que suporte eficientemente as cargas aplicadas.

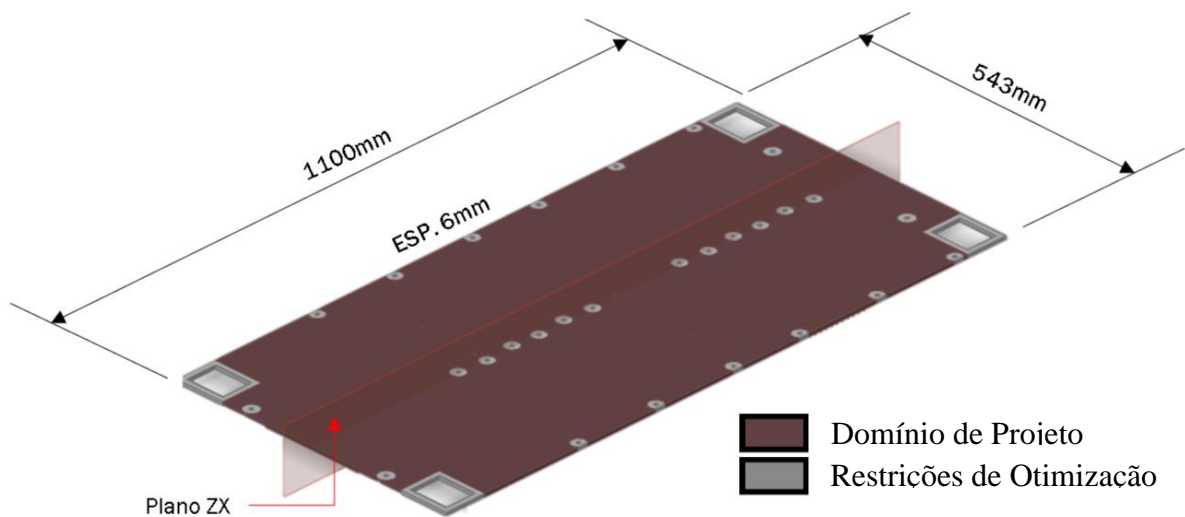
As regiões da estrutura que devem permanecer inalteradas durante o processo de otimização são críticas para a funcionalidade e integridade estrutural do suporte e incluem:

- 1-** Pontos de fixação da bateria no suporte: estes são os pontos onde as baterias são diretamente fixadas à placa de suporte. Alterações nesses pontos podem comprometer a estabilidade e segurança das baterias;

- 2- Pontos de fixação do suporte no drone: estes pontos garantem a conexão segura entre o suporte e a estrutura do drone. Modificar essas áreas pode afetar a integridade estrutural do drone;
- 3- Alças de manuseio do suporte: as alças de manuseio são necessárias para facilitar a colocação e retirada das baterias. Estas alças devem ser mantidas na OT para garantir a praticidade e segurança operacional;
- 4- Restrição de simetria em relação ao plano ZX: Para garantir uma distribuição equilibrada de cargas e minimizar tensões assimétricas, o suporte deve ser projetado com simetria em relação ao plano ZX;

A Figura 14 a seguir apresenta o modelo base para OT, que serve como referência inicial para o processo de otimização. A partir deste ponto de partida, a OT visa identificar as regiões do modelo que são menos solicitadas estruturalmente e que, portanto, podem ter seu material removido, resultando em um *design* mais leve e eficiente. O modelo base, portanto, é crucial para a comparação e avaliação dos ganhos em termos de redução de massa e melhorias estruturais ao longo das etapas subsequentes do projeto.

Figura 14. Modelo Base para Otimização Topológica



Fonte: Autores (2024).

Ao definir claramente essas duas categorias, o processo de otimização pode ser executado de forma eficiente, garantindo que todas as áreas críticas do projeto sejam preservadas enquanto o restante da estrutura é refinado para alcançar os objetivos de projeto.

3.4. Propriedades do Material

A escolha do material para a placa suporte é fundamental para garantir a resistência e durabilidade necessárias. O material selecionado para este projeto é o Alumínio 7050 T7451, conhecido por sua alta resistência e boa relação peso-resistência. A espessura da matéria prima é 6,35 mm, a direção de grão é longitudinal e a base de propriedades mecânicas é “B”. Embora a base “B” ainda garanta boas propriedades mecânicas, as tolerâncias permitidas são mais amplas, e o controle de qualidade pode não ser tão rigoroso quanto o da base “A”. As propriedades do material são detalhadas na Tabela 3.

Tabela 3. Propriedades do Material – Alumínio 7050 T7451.

| Propriedade | Valor |
|----------------------------------|--------------|
| Módulo de elasticidade (MPa) | 71016 |
| Coefficiente de Poisson | 0,330 |
| Tensão de escoamento (MPa) | 461,949 |
| Tensão de ruptura (MPa) | 524,002 |
| Densidade (ton/mm ³) | 2,823E-09 |

Fonte: MIL-HDBK-5H (1998).

3.5. Propriedades de Massa e Centro de Gravidade das Baterias

A distribuição de massa e o centro de gravidade (CG) das baterias são fundamentais para a análise estrutural e a otimização do suporte. A Tabela 4 e a Tabela 5 apresentam as propriedades de massa e CG das baterias nos *layouts* de montagem com quatro e três baterias, respectivamente.

Tabela 4. Propriedades de Massa e CG das Baterias – Layout de 4 Baterias.

| Item | Massa (Kg) | CGx (mm) | CGy (mm) | CGz (mm) |
|-------------|-------------------|-----------------|-----------------|-----------------|
| Bateria 01 | 12,5 | 1070,636 | 121,681 | 18,821 |
| Bateria 02 | 12,5 | 2378,795 | 121,681 | 18,821 |
| Bateria 03 | 12,5 | 2770,976 | -1,70E-08 | 18,821 |
| Bateria 04 | 12,5 | 1473,918 | -1,70E-08 | 18,821 |

Fonte: Autores (2024).

Tabela 5. Propriedades de Massa e CG das Baterias – Layout de 3 Baterias.

| Item | Massa (Kg) | CGx (mm) | CGy (mm) | CGz (mm) |
|-------------|-------------------|-----------------|-----------------|-----------------|
| Bateria 01 | 12,5 | 1070,636 | 121,681 | 18,821 |
| Bateria 02 | 12,5 | 2378,795 | 121,681 | 18,821 |
| Bateria 03 | 12,5 | 2770,976 | -1,70E-08 | 18,821 |

Fonte: Autores (2024).

3.6. Restrições de Manufatura

Após a OT, a manufatura da peça otimizada requer consideração cuidadosa dos parâmetros e restrições específicas do processo de usinagem. Esses parâmetros garantem que o *design* otimizado seja fabricável e atenda aos requisitos de qualidade e precisão. Abaixo estão os principais parâmetros e restrições de manufatura considerados:

- 1- Raio da Ferramenta: O raio da ferramenta de corte influencia diretamente nos cantos e contornos da peça. Para este projeto, utiliza-se uma ferramenta com raio de canto de 5 mm, com um acréscimo de 0,5 mm para interpolação, garantindo acabamento suave e preciso. Além disso, o raio da ponta da ferramenta é de 3 mm, correspondente ao raio de fundo da peça.;
- 2- Orientação da Ferramenta: Durante o processo de usinagem, a ferramenta é alinhada com o eixo Z do modelo, garantindo que os cortes sejam realizados de forma precisa e consistente em relação à geometria da peça.

Esses parâmetros são essenciais para garantir a integridade do processo de fabricação e a conformidade com as especificações de design.

3.7. Objetivo e Condições de Parada da Otimização

O objetivo da OT a qual propõe-se performar é maximizar a rigidez estrutural do suporte, reduzindo ao mínimo sua flexibilidade. Esse objetivo é fundamental para garantir que o suporte possa suportar as cargas aplicadas durante a operação do drone. Segundo Palma (2018), esta abordagem é uma das primeiras formulações utilizadas para resolver esse problema e é escolhida por sua aplicação em problemas de grande escala, devido à simplicidade de sua função objetivo e restrições.

A condição de parada refere-se à porcentagem do volume total do projeto que deve ser preservada. Conforme explicado por Palma (2018), a maximização da rigidez global (ou a minimização da flexibilidade) deve obedecer a essa limitação de volume.

3.8. Ferramentas de Projeto, Otimização Topológica e Análise Estrutural

Para o desenvolvimento deste trabalho e a análise estrutural dos fenômenos físicos atuantes no sistema, bem como a OT propriamente dita, propõe-se utilizar os softwares: Altair Inspire, CATIA V5 e Siemens Femap Nastran.

O Altair Inspire é uma ferramenta de simulação estrutural que permite a execução de OT. Este *software* é amplamente utilizado na indústria para desenvolver *designs* de componentes leves e eficientes. Facilita a criação de modelos de *design* otimizados para

atender a especificações de rigidez e resistência enquanto minimiza a massa. Utilizando algoritmos avançados, identifica áreas de um componente que podem ser removidas ou reforçadas, resultando em *designs* que utilizam material de forma eficiente e mantêm a integridade estrutural.

O CATIA V5 é um *software* CAD (*Computer Aided Design*) – Desenho Assistido por Computador, que será utilizado para modelar a peça, partindo dos resultados de OT do Altair Inspire. Considera-se nesta modelagem os parâmetros de usinagem e manufatura, garantindo a viabilidade prática dos *designs* otimizados antes da produção. Além disso, pode-se considerar modificações de *design* para atender ao requisito de intercambialidade entre os layouts de 3 e 4 baterias.

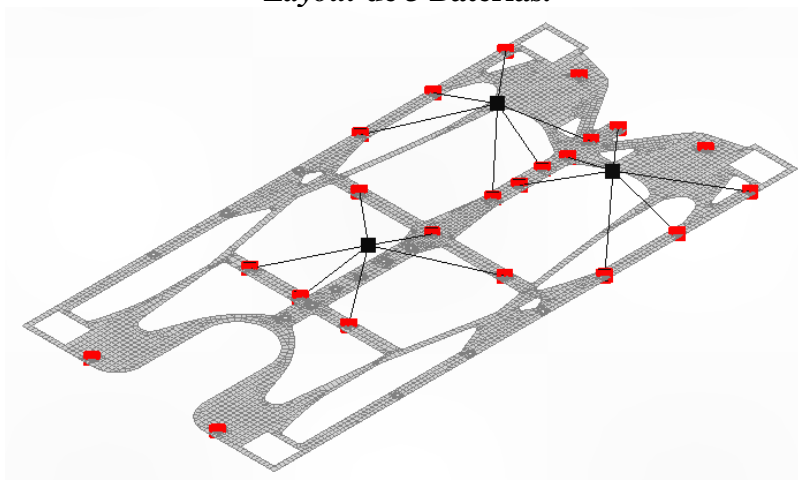
Por fim, o Siemens Femap Nastran é uma solução de análise por elementos finitos (FEA) que permite realizar simulações detalhadas de comportamento estrutural sob várias condições de carga. Conhecido por sua precisão e capacidade de lidar com problemas complexos de engenharia, o Femap Nastran pode ser utilizado para validar os *designs* otimizados gerados pelo Altair Inspire e modelados no CATIA V5. Assegura que atendam aos requisitos de resistência e estabilidade, oferecendo ferramentas robustas para análise de resistência estática, análise de estabilidade (flambagem) e outras verificações críticas.

3.9. Modelo de Análise de Elementos Finitos

Para a execução das análises, propõe-se utilizar uma malha com elementos quadriláteros, garantindo uma discretização adequada do modelo que permite a captura precisa das tensões e deformações. A escolha da malha quadrilátera é fundamental para assegurar a precisão dos resultados, facilitando a obtenção de dados confiáveis e detalhados para a validação estrutural do suporte das baterias.

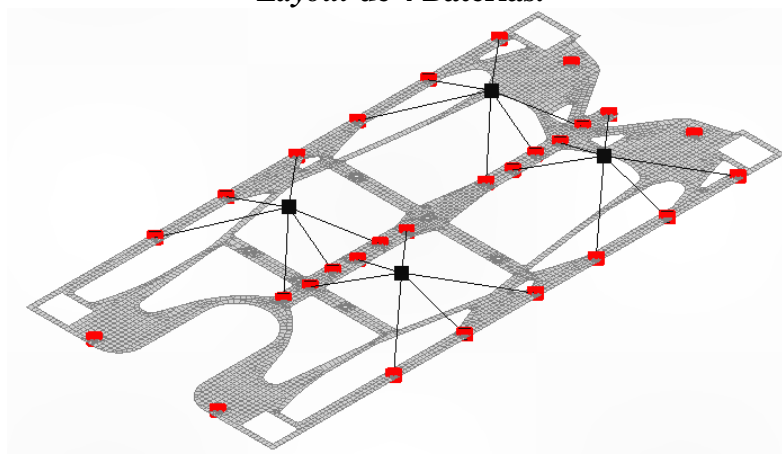
Adicionalmente, foram criados elementos de massa para representar a massa das baterias, assegurando que a distribuição de carga no modelo seja realista. Elementos rígidos foram utilizados para representar a fixação das baterias no suporte, garantindo que as condições de fixação sejam adequadamente simuladas. Por fim, os pontos de fixação do suporte na estrutura do drone também foram modelados com elementos rígidos, assegurando que as interações entre o suporte e a estrutura do drone sejam representadas de maneira precisa e robusta. A Figura 15 e a Figura 16 mostram, respectivamente, o modelo de elementos finitos da placa com *os layouts* de 3 e 4 baterias.

**Figura 15. Discretização do Modelo em Elementos de Placa, Massa e Rígido –
Layout de 3 Baterias.**



Fonte: Autores (2024).

**Figura 16. Discretização do Modelo em Elementos de Placa, Massa e Rígido –
Layout de 4 Baterias.**



Fonte: Autores (2024).

O carregamento e os apoios são representados de acordo com as condições de contorno prescritas. As cargas são aplicadas na forma de acelerações, a qual se refletem nas massas das baterias e da placa, garantindo que a resposta do modelo represente com precisão as condições reais de carregamento. Os apoios garantem que as interações e restrições reais do suporte no drone sejam consideradas nas análises.

A preparação do modelo é essencial para refletir com precisão as condições reais de operação do suporte das baterias, permitindo que as análises estáticas e de estabilidade forneçam *insights* valiosos sobre o desempenho estrutural e a segurança do *design* otimizado. A correta representação dos elementos de massa, elementos rígidos e condições de contorno é crucial para garantir a validade das simulações e a confiabilidade dos

resultados obtidos, fornecendo uma base sólida para a avaliação e aprimoramento do *design* do suporte.

3.10. Procedimento de Análise

3.10.1. Procedimento de Otimização Topológica

A metodologia de OT adotada neste trabalho envolve os seguintes passos:

- (a) OT e comparação de resultados: Realizar otimizações topológicas considerando diferentes condições de parada, definidas como 10% e 15% do volume total de projeto a ser mantido. Para esta etapa, considera-se apenas as condições de contorno para a configuração com quatro baterias;
- (b) Análise e comparação dos resultados das otimizações: Avaliar os resultados das otimizações do ponto de vista de rigidez estrutural. A geometria que melhor representa um caminho de carga ótimo será escolhida para o *design* final;
- (c) Modelamento CAD da peça otimizada: Considerar parâmetros de usinagem e simplificações de geometria aplicáveis. O modelo final deve atender ao requisito de intercambialidade entre configurações de três e quatro baterias.

3.10.2. Procedimento de Análise Estrutural

Para garantir que o suporte das baterias atende aos requisitos de resistência e segurança, a metodologia de análise estrutural inclui os seguintes passos:

- (a) Análise de resistência estática em termos de carga limite: Esta análise visa garantir que o suporte seja capaz de suportar as cargas máximas esperadas em serviço. Considera-se a aplicação de cargas operacionais típicas para verificar a resistência do suporte;
- (b) Análise de resistência estática em termos de carga última: Este cenário visa garantir que o suporte seja capaz de suportar as cargas limite multiplicadas por fatores de segurança prescritos. As cargas últimas são especificadas pela Akaer Engenharia S.A., conforme os valores fornecidos;
- (c) Análise de estabilidade (flambagem): Assegurar que o suporte não sofrerá flambagem sob a carga aplicada. A análise de estabilidade é crítica para garantir que a estrutura não colapse sob cargas compressivas elevadas.

3.10.2.1. Critério de Dimensionamento

A análise de resistência estática em termos de carga limite (Análise A) envolve a comparação da tensão de von Mises ($\sigma_{von\ Mises}$) com a tensão de escoamento ($\sigma_{escoamento}$) do material. Este critério é essencial para garantir que o material não sofrerá deformações plásticas sob as cargas operacionais típicas. Além disso, é necessário verificar que a estrutura não apresente um deslocamento maior que 20 mm sob as cargas aplicadas, assegurando assim a integridade dimensional e funcional do suporte.

Na análise de resistência estática em termos de carga última (Análise B), a tensão de von Mises ($\sigma_{von\ Mises}$) deve ser comparada à tensão de ruptura do material ($\sigma_{ruptura}$). Este critério garante que o material não se romperá sob as cargas limite multiplicadas por fatores de segurança prescritos.

Para a análise de estabilidade (flambagem) (Análise C), é necessário verificar os autovalores λ_i da estrutura. Todos os autovalores devem ser maiores que 1 o que assegura que a carga crítica de flambagem é maior que a carga aplicada. Esse critério é fundamental para garantir que a estrutura não sofrerá flambagem sob as cargas compressivas elevadas.

Esses critérios de dimensionamento são utilizados na análise estrutural do suporte das baterias para garantir a resistência e segurança necessárias. Cada análise aborda aspectos específicos que, em conjunto, asseguram que a estrutura possa suportar as cargas operacionais e limite sem falhas ou deformações inaceitáveis. A Tabela 6 mostra os critérios de dimensionamento aplicáveis à análise estrutural do suporte de baterias.

Tabela 6. Critérios de Dimensionamento para Análise Estrutural do Suporte de Baterias

| Análise | Critério de Dimensionamento |
|---|--|
| Análise de resistência estática em termos de carga limite (A) | $\sigma_{von\ Mises} \leq \sigma_{Escoamento}$ $Deslocamento \leq 20mm$ |
| Análise de resistência estática em termos de carga última (B) | $\sigma_{von\ Mises} \leq \sigma_{Ruptura}$ $Deslocamento \leq 20mm$ |
| Análise de estabilidade (flambagem) (C) | $\lambda_i > 1$ (Para todos os autovalores λ_i) |

Fonte: Adaptado de Bruhn (1973).

Nesse contexto, a Equação 11 relaciona a margem de segurança da estrutura em relação ao escoamento (Análise A). A Equação 12 relaciona a margem de segurança da estrutura em relação à ruptura (Análise B). Por fim, a Equação 13 calcula a margem de segurança da carga crítica de flambagem em relação à carga aplicada (Análise C).

$$MS_{Escoamento} = \left(\frac{\sigma_{Escoamento}}{\sigma_{Von Mises}} - 1 \right) \times 100 \quad (11)$$

$$MS_{Ruptura} = \left(\frac{\sigma_{Ruptura}}{\sigma_{von mises}} - 1 \right) \times 100 \quad (12)$$

$$MS_{Carga Critica} = (\lambda_i - 1) \times 100 \quad (13)$$

Flambagem

4. RESULTADOS E DISCUSSÕES

Este capítulo apresenta os resultados obtidos durante o desenvolvimento do trabalho de graduação, incluindo os resultados da OT do suporte das baterias do veículo aéreo não tripulado "AKR A200" e as análises estruturais realizadas para validar os designs otimizados.

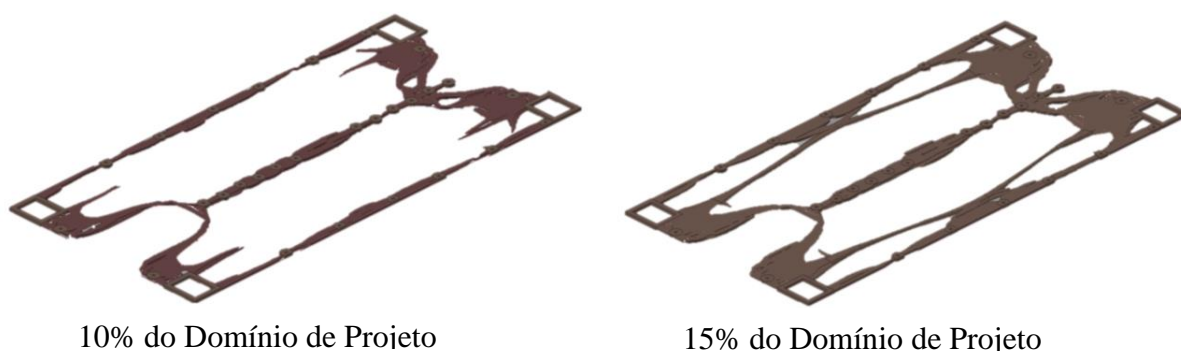
4.1. Resultados da Otimização Topológica

A OT foi realizada utilizando o software Altair Inspire, com o objetivo de desenvolver um suporte de baterias leve e eficiente, capaz de suportar as cargas operacionais e de segurança impostas durante o voo do drone AKR A200. Foram consideradas as configurações de três e quatro baterias, com foco na configuração de quatro baterias devido à sua maior exigência estrutural.

4.1.1. Comparação dos Resultados com Diferentes Condições de Parada

A OT foi realizada considerando duas condições de parada diferentes: 10% e 15% do domínio de projeto. A Figura 17 apresenta os resultados da otimização para cada condição de parada.

Figura 17. Resultados da Otimização Topológica.



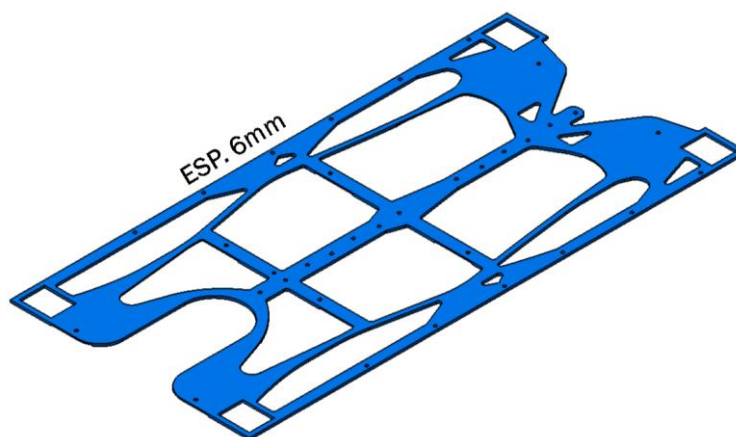
Fonte: Autores (2024).

No modelo com 10%, embora haja continuidade no caminho de carga, a ausência de nervuras que contribuam para a resistência ao cisalhamento da placa é notável. Embora haja um início na criação dessas nervuras, a restrição de volume no *software* impede a conclusão do caminho de carga. Por outro lado, no modelo de 15%, o *software* tem espaço suficiente para finalizar essas nervuras, tornando-o mais promissor do ponto de vista estrutural.

4.1.2. Modelamento CAD

A partir dos resultados da OT obtidos com o Altair Inspire, é necessário modelar a peça considerando os parâmetros de usinagem e manufatura, bem como atender ao requisito de intercambialidade entre *layouts* de 3 e 4 baterias. Neste sentido, foi utilizado o *software* CATIA V5 para executar o modelamento. A Figura 18 mostra o modelo CAD com as modificações de projeto aplicáveis.

Figura 18. Modelo CAD com as Modificações de Projeto Aplicáveis.



Fonte: Autores (2024).

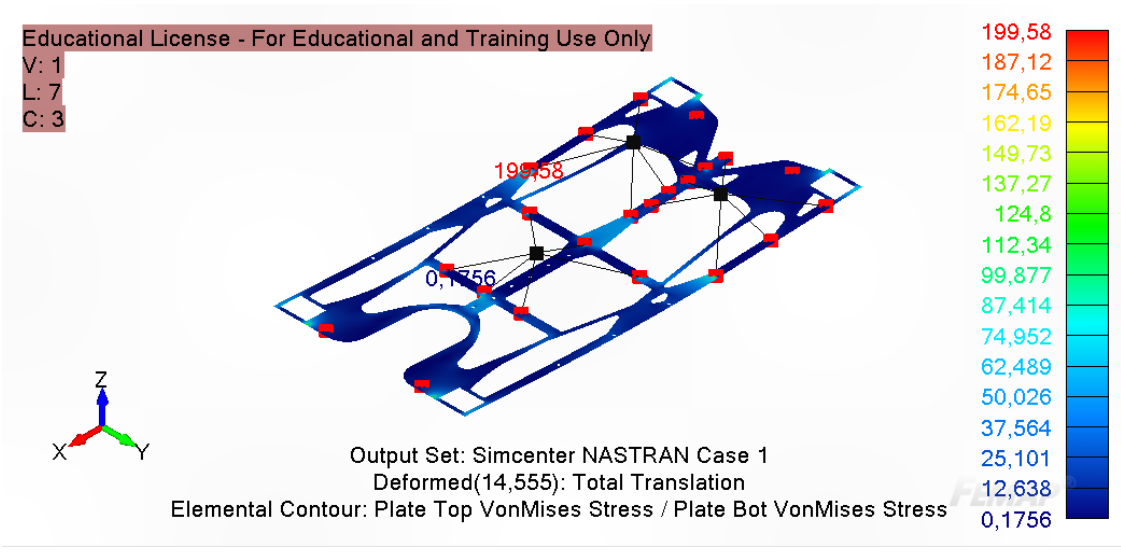
4.2. Análise Estrutural

Para validar os *designs* otimizados, foram realizadas análises estruturais utilizando o *software* Siemens Femap Nastran. Foram considerados os cenários de carga limite e carga última, bem como a análise de estabilidade para garantir que o suporte das baterias atenda aos requisitos de resistência e segurança.

4.2.1. Análise de Resistência Estática em Termos de Carga Limite

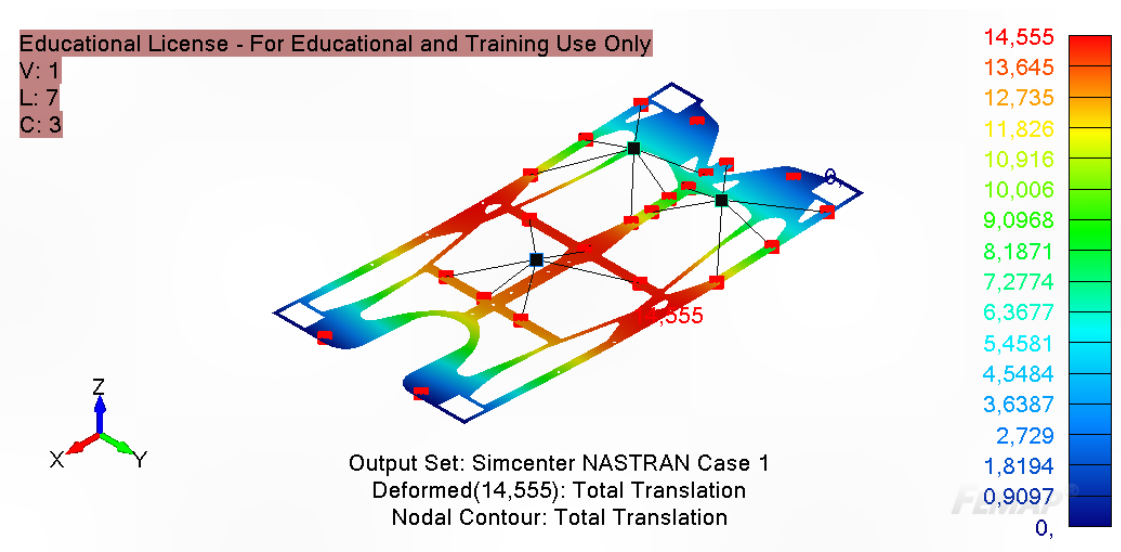
A Figura 19 apresenta os resultados das máximas tensões de von Mises no modelo com *layout* de 3 baterias, enquanto a Figura 20 mostra o deslocamento total.

Figura 19. Máxima Tensão de von Mises do Suporte – *Layout* de 3 Baterias.



Fonte: Autores (2024).

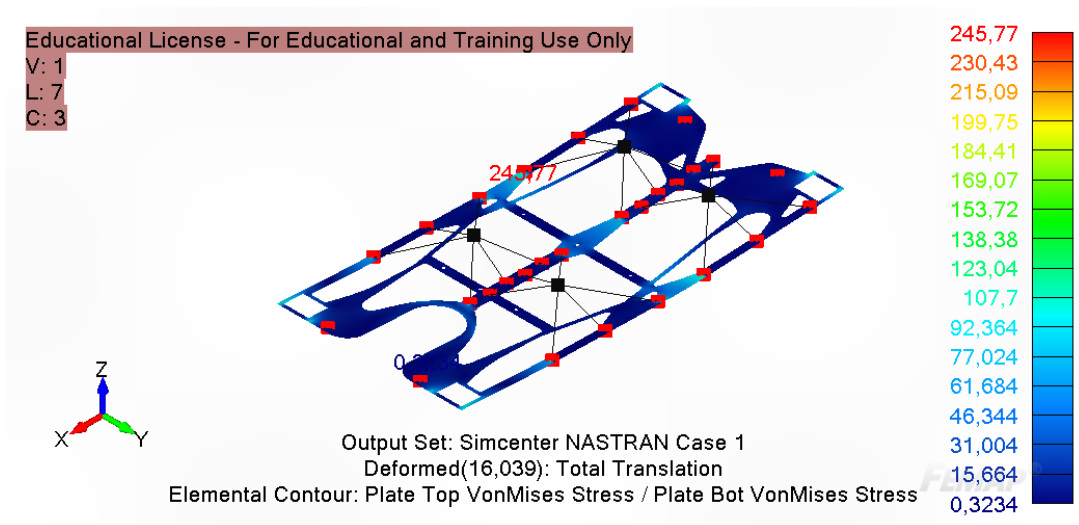
Figura 20. Deslocamento Total do Suporte – *Layout* de 3 Baterias.



Fonte: Autores (2024).

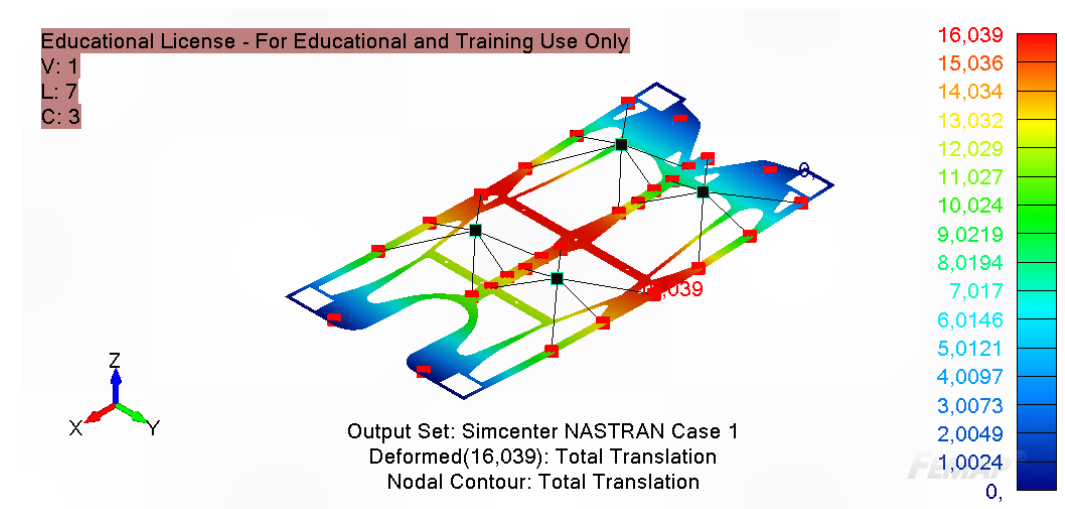
A Figura 21 apresenta os resultados das máximas tensões de von Mises no modelo com *layout* de 4 baterias, enquanto a Figura 22 mostra o deslocamento total.

Figura 21. Máxima Tensão de von Mises do Suporte – *Layout* de 4 Baterias.



Fonte: Autores (2024).

Figura 22. Deslocamento Total do Suporte – *Layout* de 4 Baterias.



Fonte: Autores (2024).

A Tabela 7 compara os resultados de tensão e deslocamento do suporte sob o carregamento de 3 e 4 baterias.

Tabela 7. Comparação dos Resultados de Tensão e Deslocamento dos *Layouts* de 3 e 4 Baterias – Carga Limite.

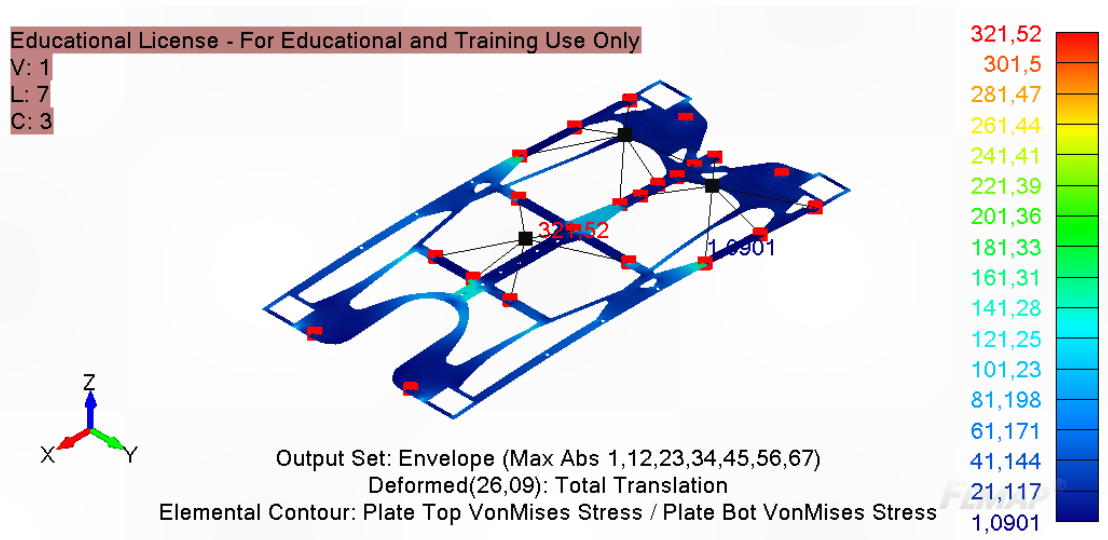
| Resultado | <i>Layout</i> de 3 baterias | <i>Layout</i> de 4 baterias |
|----------------------------------|-----------------------------|-----------------------------|
| Máxima tensão de von Mises (MPa) | 199,58 | 245,77 |
| Deslocamento total (mm) | 14,555 | 16,039 |

Fonte: Autores (2024).

4.2.2. Análise de Resistência Estática em Termos de Carga Última

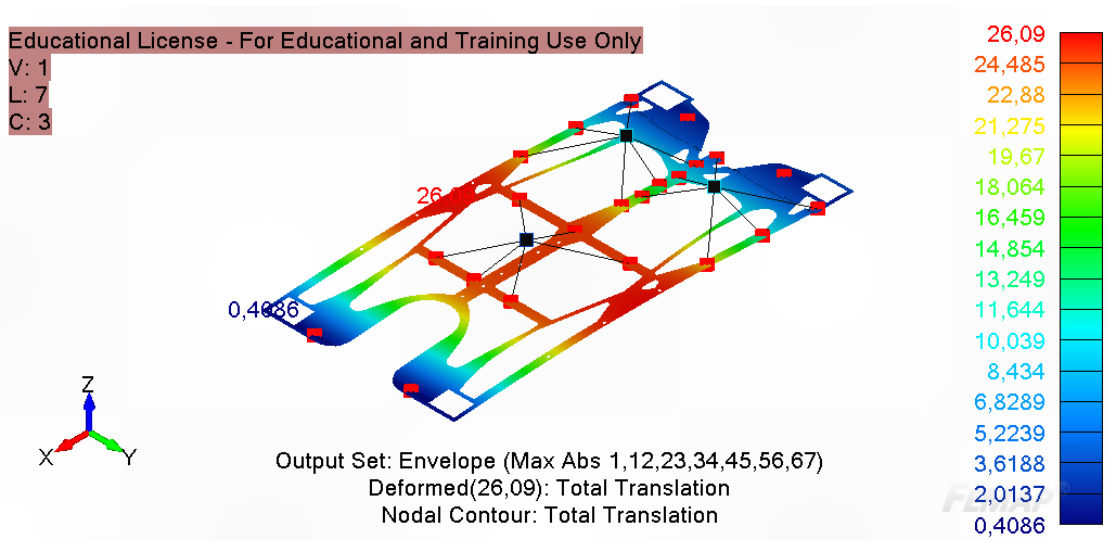
A Figura 23 apresenta os resultados das máximas tensões de von Mises no modelo com *layout* de 3 baterias, enquanto a Figura 24 mostra o deslocamento total.

Figura 23. Máxima Tensão de von Mises do Suporte – *Layout* de 3 Baterias.



Fonte: Autores (2024).

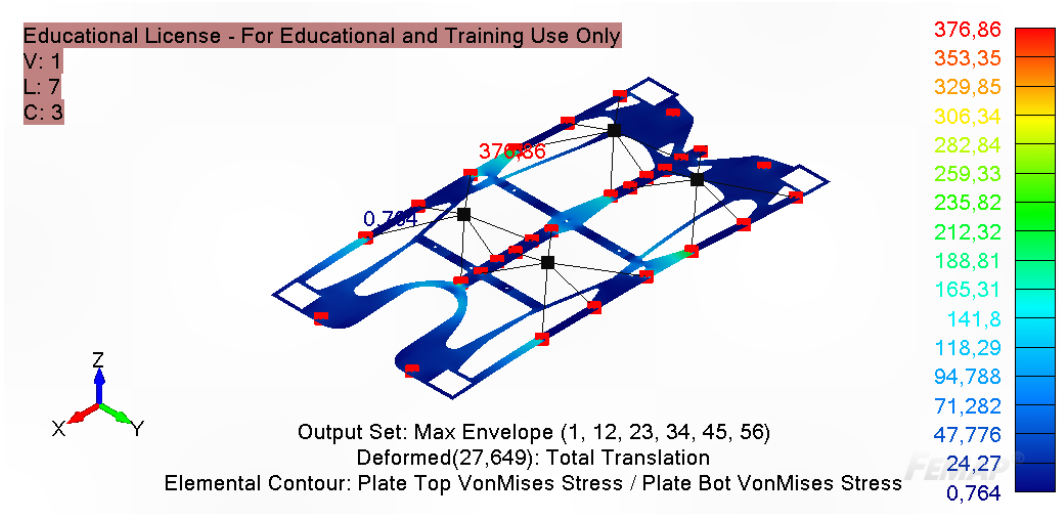
Figura 24. Deslocamento Total do Suporte – *Layout* de 3 Baterias.



Fonte: Autores (2024).

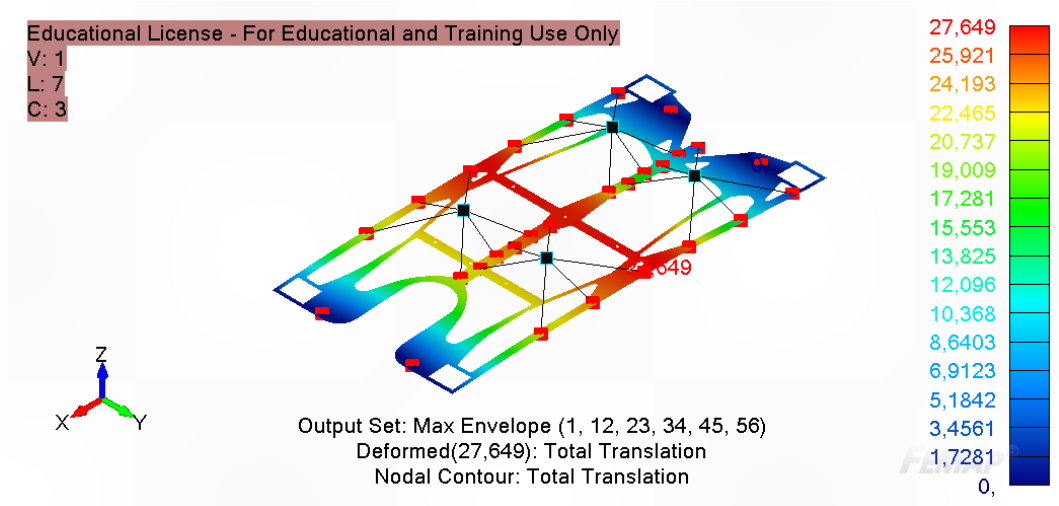
A Figura 25 apresenta os resultados das máximas tensões de von Mises no modelo com *layout* de 4 baterias, enquanto a Figura 26 mostra o deslocamento total.

Figura 25. Máxima Tensão de von Mises do Suporte – *Layout* de 4 Baterias.



Fonte: Autores (2024).

Figura 26. Deslocamento Total do Suporte – *Layout* de 4 Baterias.



Fonte: Autores (2024).

A Tabela 8 compara os resultados de tensão e deslocamento do suporte sob o carregamento de 3 e 4 baterias.

Tabela 8. Comparação dos Resultados de Tensão e Deslocamento dos *Layouts* de 3 e 4 Baterias – Cara Última.

| Resultado | <i>Layout</i> de 3 baterias | <i>Layout</i> de 4 baterias |
|----------------------------------|-----------------------------|-----------------------------|
| Máxima tensão de von Mises (MPa) | 321,52 | 376,86 |
| Deslocamento total (mm) | 26,09 | 27,649 |

Fonte: Autores (2024).

4.2.3. Análise de Estabilidade (Flambagem)

A Tabela 9 e Tabela 10 mostram os 10 autovalores mais próximos de 1 que a estrutura apresentou após análise de flambagem linear realizada no *software* FEMAP, considerando as diferentes condições de contorno apresentadas, para os *layouts* de 3 e 4 baterias, respectivamente

Tabela 9. Relação dos Resultados de Autovalores Mais Próximos de 1 – Layout de 3 Baterias.

| Autovalor (λ_i) |
|---------------------------|
| 1,530705 |
| 1,595068 |
| 1,814987 |
| 1,906785 |
| 2,401471 |
| 2,538987 |
| 4,294481 |
| 4,360029 |
| 4,735408 |
| 5,209279 |

Fonte: Autores (2024).

Tabela 10. Relação dos Resultados de Autovalores Mais Próximos de 1 – Layout de 4 Baterias.

| Autovalor (λ_i) |
|---------------------------|
| 1,620414 |
| 1,626724 |
| 1,976841 |
| 2,099729 |
| 2,251764 |
| 2,660243 |
| 3,626988 |
| 3,705847 |
| 4,750202 |
| 5,259042 |

Fonte: Autores (2024).

4.2.4. Critério de Dimensionamento

Para realizar o dimensionamento da estrutura, foram considerados os valores mais críticos para cada tipo de análise. Conforme observado na Tabela 11, o suporte de baterias

não atendeu somente ao critério de dimensionamento de deslocamento na análise de resistência estática para a carga última.

Tabela 11. Critérios de Dimensionamento para Análise Estrutural do Suporte de Baterias

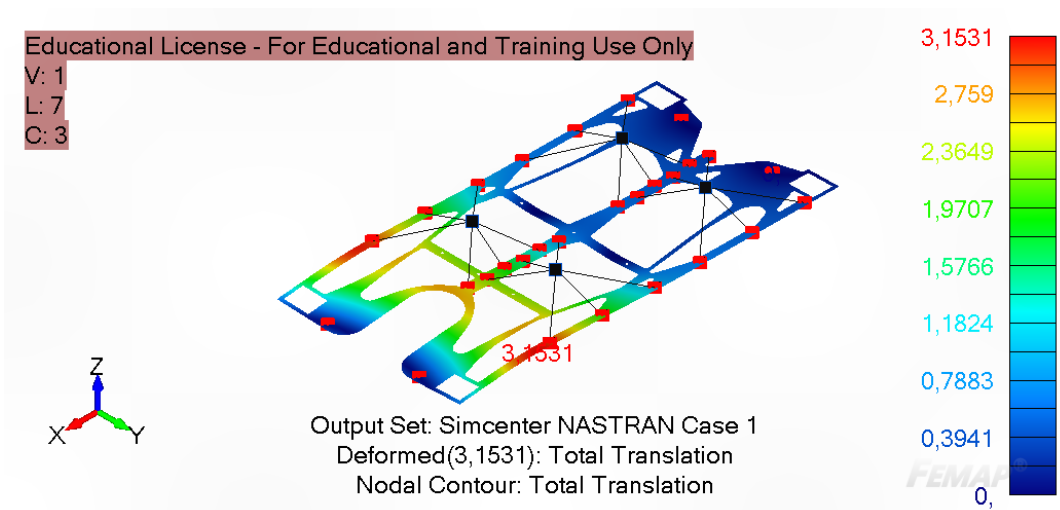
| Análise | Critério de Dimensionamento | Resultado | MS (%) |
|---|---|--------------------------|--------|
| Análise de resistência estática em termos de carga limite (A) | $\sigma_{von Mises} \leq \sigma_{Escoamento}$ | 245,77 $\leq 461,949$ | 87,95% |
| | $Deslocamento \leq 20 \text{ mm}$ | 16,039 mm | - |
| Análise de resistência estática em termos de carga última (B) | $\sigma_{von Mises} \leq \sigma_{Ruptura}$ | 376,86 $\leq 524,002$ | 39,04% |
| | $Deslocamento \leq 20 \text{ mm}$ | 27,649 mm | - |
| Análise de estabilidade (flambagem) (C) | $\lambda_i > 1$ (Para todos os autovalores λ_i) | 1,530705 > 1 | 53% |

Fonte: Adaptado de Bruhn (1973).

4.2.5. Recomendações de Projeto

Para reduzir o deslocamento do suporte de baterias sob uma condição de carga última, recomenda-se adicionar dois prendedores no meio da placa fixando no perfil ômega, de modo a diminuir a deflexão na direção Z. A Figura 27 mostra o deslocamento total modelo com *layout* de 4 baterias sob uma condição de carga última, considerando a recomendação de projeto.

Figura 27. Deslocamento Total do Suporte Considerando Recomendações de Projeto – Layout de 4 Baterias Sob Uma Condição de Carga Última.



Fonte: Autores (2024).

4.3. Variação de Massa ao Decorrer do Projeto

A variação de massa ao longo do desenvolvimento do suporte de baterias do drone AKR A200 foi significativa e demonstra a eficácia da OT e das modificações subsequentes aplicadas ao modelo CAD. Este tópico apresenta a evolução da massa desde o modelo base até o modelo final, detalhando as reduções e ajustes realizados em cada etapa do processo.

O modelo base, utilizado como ponto de partida para a OT, tinha uma massa inicial de 8,53 kg. Este modelo representava um *design* inicial sem qualquer otimização ou refinamento estrutural, servindo como referência para as melhorias subsequentes.

Após a aplicação da OT com a condição de manter 10% do volume do domínio de projeto, a massa do suporte foi reduzida para 1,74 kg. Esta versão apresentou uma continuidade no caminho de carga, mas com ausência de nervuras suficientes para resistência ao cisalhamento da placa.

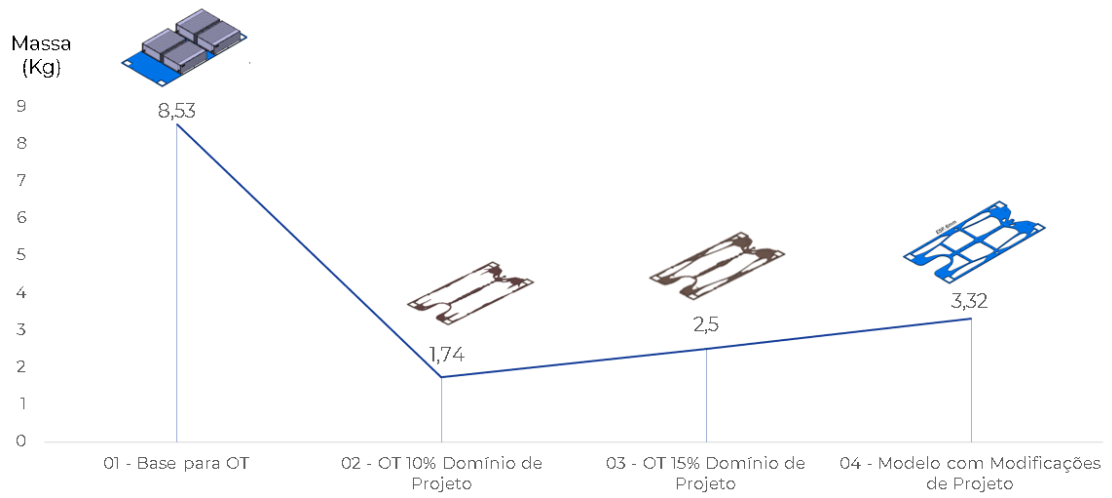
Com a OT ajustada para manter 15% do volume do domínio de projeto, a massa aumentou ligeiramente para 2,50 kg. Esta versão permitiu a inclusão de nervuras adicionais, completando o caminho de carga e proporcionando uma solução estruturalmente mais robusta.

O modelo final CAD, desenvolvido a partir dos resultados de OT e considerando parâmetros de usinagem e manufatura, resultou em uma massa de 3,32 kg. Este modelo incorporou todas as melhorias estruturais necessárias, assegurando que o suporte fosse fabricável e cumprisse o requisito de intercambialidade entre *layouts* de baterias. A Tabela 12 e o Gráfico 1 resumem a variação de massa ao longo das diferentes etapas do projeto.

Tabela 12. Comparativo da Variação de Massa.

| Modelo | Massa (Kg) |
|--|-------------------|
| Base Para Otimização Topológica | 8,53 |
| Otimização com 10% do Domínio de Projeto | 1,74 |
| Otimização com 15% do Domínio de Projeto | 2,50 |
| CAD com Modificações de Projeto Aplicáveis | 3,32 |

Fonte: Autores (2024).

Gráfico 1. Comparativo da Variação de Massa.

Fonte: Autores (2024).

5. CONCLUSÃO

O presente trabalho de conclusão de curso teve como foco a análise de OT aplicada a um suporte de baterias para um Veículo Aéreo Não Tripulado denominado “A200”. Ao longo do estudo, foram realizadas análises detalhadas tanto do comportamento estático do modelo quanto da resistência à flambagem linear.

A gama de cenários analisados e resultados obtidos foi crucial para a definição de um modelo considerado "ótimo". Através da OT, foi possível identificar as regiões de maior e menor solicitação de material, permitindo uma distribuição mais eficiente e leve, sem comprometer a resistência e a estabilidade estrutural do suporte de baterias. Este processo não só confirmou a viabilidade do uso de técnicas de OT em componentes aeronáuticos, mas também destacou as vantagens de tal abordagem em termos de economia de material e desempenho mecânico.

Vale ressaltar que a OT resultou em uma redução de 61% da massa em relação ao volume inicial do projeto, mesmo considerando as restrições de manufatura aplicáveis. No entanto, a peça não atendeu apenas a um critério de dimensionamento: o critério de deslocamento na análise de resistência estática para a carga última. Como a quantidade de prendedores era uma definição de projeto e *input* para a otimização topológica, foi necessário adotar recomendações, como a adição de dois prendedores no meio da placa, de modo a diminuir a deflexão na direção Z.

Entretanto, embora os resultados sejam promissores, este estudo abre portas para investigações futuras mais aprofundadas. Um aspecto que merece atenção especial é a análise de fadiga em estruturas otimizadas topologicamente. Estudos futuros devem abordar de forma criteriosa a durabilidade a longo prazo desses componentes, considerando os ciclos de carregamento e descarregamento que ocorrem durante a operação dessas aeronaves. A análise de fadiga é fundamental para garantir que as estruturas mantêm sua integridade ao longo do tempo, proporcionando segurança e confiabilidade em aplicações reais.

Em suma, o trabalho realizado não só atendeu aos objetivos propostos, demonstrando a eficácia da OT no desenvolvimento de um suporte de baterias para um UAV, como também pavimentou o caminho para futuras pesquisas que poderão aprimorar ainda mais essa tecnologia.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ANAC. **RBAC 23.305**: 2013: Requisitos de Aeronavegabilidade: Estruturas. Brasília, 2013.

ANDREASSEN, E.; CLAUSEN, A.; SCHEVENELS, M.; LAZAROV, B. S.; SIGMUND O. Efficient topology optimization in MATLAB using 88 lines of code. *Structural and Multidisciplinary Optimization*. v. 43, p. 1-16, 2010. ISSN 1.

AZEVEDO, A. F. M. **Método dos Elementos Finitos**. Porto: Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto de Portugal, 2003.

BARBOSA, E. B. M. **Uma heurística para otimização de meta-heurísticas por meio de métodos estatísticos**. 2016. 194 p. Tese (Doutorado em Engenharia Mecânica) – Universidade Estadual Paulista, Guaratinguetá, SP, 2016.

BENDSØE, M. P. e KIKUCHI, N. Generating optimal topologies in structural design using a homogenization method. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. Vol. 71, n. 2, p. 197-224, 1988 apud STUMP, F. V. *Otimização Topológica Aplicada ao Projeto de Estruturas Tradicionais e Estruturas com Gradação Funcional Sujeitas a Restrição de Tensão*. USP – Universidade de São Paulo, São Paulo, 2006.

BENDSØE, M. P. e SIGMUND, O. **Topology Optimization: Theory, Methods and Applications**. Berlin: Springer, 2003.

BRUHN, E. F. **Analysis and Design of Flight Vehicle Structures**. Cincinnati: Tri-State Offset Company, 1973.

CARDOSO, E. L. e FONSECA, J. S. O. Complexity Controls in the Topology Optimization of Continuum Structure. **Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering**. Vol. 25, n. 3, p. 293-301, 2003.

CAVALCANTI, L. V. **Análise da Estabilidade e Vibrações de Cascas Conoidais Abatidas**. 2014. 154 p. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil). PUC-Rio, Rio de Janeiro, 2014.

CHANDRUPATLA, T. R.; BELEGUNDU, A. D. **Elementos Finitos**. São Paulo: Pearson Education do Brasil, 2014.

CHENG, K. T.; OLHOFF, N. An investigation concerning optimal-design of solid elastic plates. *International Journal of Solids And Structures*, 1981 apud STUMP, F. V. *Otimização Topológica Aplicada ao Projeto de Estruturas Tradicionais e Estruturas com Gradação Funcional Sujeitas a Restrição de Tensão*. USP – Universidade de São Paulo, São Paulo, 2006.

CHENG, K. T.; OLHOFF, N. Regularized formulation optimal-design of axisymmetric plates. *International Journal of Solids And Structures*, 1982 apud STUMP, F. V. *Otimização Topológica Aplicada ao Projeto de Estruturas Tradicionais e Estruturas com Gradação Funcional Sujeitas a Restrição de Tensão*. USP – Universidade de São Paulo, São Paulo, 2006.

COOK, S. A. The complexity of theorem-proving procedures. In: **THIRD ANNUAL ACM SYMPOSIUM ON THEORY OF COMPUTING**, New York, 1971. **STOC 71' Proceedings of the Third Annual ACM Symposium on Theory of Computing**, New York: ACM, 1971, p 151-158.

COOK, R. D. et al. **Concepts and Applications of Finite Element Analysis: 4th Edition**. New York: John Wiley & Sons, 2002.

COUTINHO, K. D. **Método de Otimização Topológica em Estruturas Tridimensionais. 2006**. 95 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Mecânica) – UFRN - Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal-RN, 2006.

CORDENONSI, A. Z. **Ambientes, Objetos e Dialogicidade: Uma Estratégia de Ensino Superior Em Heurísticas E Metaheurísticas**. 2008. 228 p. Tese (Doutorado Em Informática Na Educação) – Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, RS, 2008.

DIAZ, A. e SIGMUND, O. Checkerboard Patterns in Layout Optimization. **Structural Optimization**. Vol. 10, n. 10, p. 40-45, 1995.

FERRAZ, B. A. **Métodos computacionais de otimização**. Ponta Grossa: Atena, 2021.

GOLDBARG, M. C.; LUNA, H. P. L. **Otimização combinatória e programação linear: modelos e algoritmos**. 2. ed. Rio de Janeiro: Elsevier, 2005.

HABER, R. B., JOG, C. S. e BENDSØE, M. P. A New Approach to Variable Topology Shape Design Using a Constraint of Perimeter. **Structural Optimization**. Vol. 11, n. 1, p. 1-12, 1994.

JOG, J. G. N. Stability of Finite Element Models for Distributed Parameter Optimization and Topology Design. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**. Vol. 130, n 3-4, p. 203-226, 1996.

JUNIOR, J. G. N. **Otimização Topológica em Estruturas Bidimensionais Utilizando o Método SIMP. 2023**. 107 p. Monografia (Graduação em Engenharia Civil) - Universidade Federal de Pernambuco, Centro de Tecnologia e Geociências, Recife, Pernambuco, 2023.

KIYONO, C. Y. **Método de Otimização Topológica Aplicado ao Projeto de Sonotrodos para Transdutores Piezelétricos. 2008**. 161 p. Dissertação (Mestrado em Engenharia Mecânica) – USP – Universidade de São Paulo, São Paulo, 2008.

LOPEZ, R. H.; MIGUEL, L. F. F. **Introdução à área de otimização matemática, especialmente a sua aplicação em problemas de engenharia**. Disponível em https://ppgec.posgrad.ufsc.br/files/2013/05/Topicos_Pesquisa_UFSC-otimiza%C3%A7%C3%A3o.pdf Acesso em: 07/11/2023.

MILITARY HANDBOOK. **MIL-HDBK-5H**: 1998: METALLIC MATERIALS AND ELEMENTS FOR AEROSPACE VEHICLE STRUCTURES. Washington, 1998.

MORISHITA, G. S. L. **Otimização Topológica de Mecanismo de Quatro Barras. 2015.** 65 p. Monografia (Graduação em Engenharia Mecânica) - Universidade Tecnológica Federal do Paraná, 2015.

ODEN, J. T., KIKUCHI, N. e SONG, Y. J. On CAD-Integrated Structural Topology and Design Optimization. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering.** Vol. 89, p. 259-279, 1982.

OLINQUEVICZ, D. F. **Otimização Topológica de Estruturas Contínuas de Polipropileno com Restrições de Tensão Baseadas em Critério de Escoamento.** 126 f. Dissertação (Pós-Graduação em Engenharia Mecânica) - Universidade Feral de Minas Gerais, Belo Horizonte, 2015.

PAPADIMITRIOU, C. H.; STEIGLITZ, K. **Combinatorial Optimization: Algorithms and Complexity.** New York: Dover Publications, Inc., 1998.

PALMA, L. F. **Estudos complementares sobre Otimização Topológica Multimaterial utilizando interpolação SIMP ordenada. 2018.** 62 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil) – UFSC – Universidade Federal de Santa Catarina. Florianópolis, 2018.

PORTO, E. C. B. **Método da Homogeneização Aplicado à Otimização Estrutural Topológica.** 159 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Mecânica) - Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2006.

POUSEN, T. A. A simple Scheme to Prevent Checkerboard Patterns and One-node Connected in Topology optimization. **Structural and Multidisciplinary Optimization.** Vol. 24, n. 5, p. 396-399, 2002.

RIGO, E. **Métodos de otimização aplicado à análise de estruturas. 1999.** 53 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia de Estruturas) – USP – Universidade de São Paulo, São Carlos, 1999.

ROSA, E. **Análise de Resistência Mecânica.** Santa Catarina: UFSC, 2002.

ROZVANY, G. I. Aims, scope, methods, history and unified terminology of computer-aided topology optimization in structural mechanics. **Structural and Multidisciplinary Optimization**, Vol. 21, n. 2, p. 90–108, 2001. Apud PALMA, L. F. Estudos complementares sobre Otimização Topológica Multimaterial utilizando interpolação SIMP ordenada. UFSC – Universidade Federal de Santa Catarina. Florianópolis, 2018.

SANT’ANNA, H. M. **Otimização Topológica de Estruturas Bidimensionais Contínuas submetidas a restrições de flexibilidade e tensão.** 161 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Mecânica) - Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2002.

SIGMUND, O. A 99 line topology optimization code written in Matlab. **Structural and Multidisciplinary Optimization.** Vol. 21, n. 2, p. 120–127, 2001.

SIGMUND, O. e PETERSSON, J. Numerical Instabilities in Topology Optimization: A Survey on Procedures Dealing With Checkerboards, Mesh Dependencies and Local Minima. **Structural Optimization.** Vol. 16, p. 68-75, 1998.

SILVA, E. **Uma Formalização de Otimização Topológica com Restrição de Tensão Suavizada. 2012.** 102 p. Dissertação (Mestrado em Engenharia). Escola de Engenharia da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Rio Grande do Sul, 2012.

SIMONETTI, H. L. et al. Otimização Topológica de Estruturas Tridimensionais Usando MMA. **CIATEC**, v. 13, p. 93-110, 2021.

STOLPE, M. e SVANBERG, K. On the Trajectories of Penalization Methods for Topology Optimization. **Structural and Multidisciplinary Optimization**. Vol. 21, n. 2, p. 128-139, 2001.

STUMP, F. V. **Otimização Topológica Aplicada ao Projeto de Estruturas Tradicionais e Estruturas com Gradação Funcional Sujeitas a Restrição de Tensão. 2006.** 243 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Mecânica) – USP – Universidade de São Paulo, São Paulo, 2006.

TEIXEIRA-DIAS, F. et al. **Método dos Elementos Finitos: Técnicas de Simulação Numérica em Engenharia.** Lisboa: ETEP, 2009.

TIMOSHENKO, S. P. GERE, J. M. **Theory of Elastic Stability: Second Edition.** New York: McGraw Hill, 1963.

VANDERPLAATES, G. N. **Numerical Optimization Techniques for Engineering Design with Applications.** Boston: McGraw-Hill Book Company, 1994.

ZHOU, M., SHYY, Y. K. e THOMAS, H. L. Checkerboard and Minimum Member Size Control in Topology Optimization. **Structural and Multidisciplinary Optimization**. Vol. 21, n. 2, p. 152-158, 2001.